

hydraulica ars

ENZO BUFFONI

I QUANTI E LA
TEORIA GENERALE
DELLO SPAZIO FLUIDO

LES QUANTA ET
LA THEORIE GENERALE
DE L'ESPACE FLUIDE

*The Quanta and
The General Theory
of Fluid Space*

Tipografia Editrice Pisana

ENZO BUFFONI

I QUANTI E LA TEORIA GENERALE
DELLO SPAZIO FLUIDO

Edizioni T.E.P.

Magna equidem in hac exigua tractatione singulis de natura speculantibus inspicienda contemplandaque propono. Magna inquam, tum ob rei ipsius praestantiam, tum ob inauditam per aevum novitatem, tum etiam propter Organum, cuius beneficio eadem sensui nostro obviam sese fecerunt.

(G. Galilei Sidereus Nuncius)

Proprietà letteraria riservata
©2013 Enzo Buffoni
Laboratorio di Idraulica, Università di Pisa,
via Gabba, 22, Pisa (Italy).
e.buffoni@ing.unipi.it

Premesse

I quanti hanno la particolare condizione, una singolarità: tutto sappiamo dal punto di vista sperimentale, ma l'interpretazione, il significato dei dati ottenuti ci risulta alquanto difficile e nebuloso. In sostanza si tratta di un rompicapo degno dell'attenzione di un bravo investigatore. Infatti il dualismo onda-particella, l'onda guida, la particella stessa invece che si trasforma in onda, il successivo collasso o la riduzione dell'onda a particella nel momento stesso della misura, cioè il riapparire di nuovo della particella con tutte le sue peculiari caratteristiche estremamente localizzate nello spazio, sono tutti aspetti di questo affascinante rompicapo, indubbiamente arduo da affrontare.

Molte interpretazioni, alcune decisamente strane, (basti pensare, per esempio, al potenziale quantistico, nascosto, di David Bohm) sono apparse in tutto questo tempo, ma le prime due sono senza dubbio le più interessanti: quella dovuta a Louis De Broglie e la successiva, adottata oggi dalla stragrande maggioranza dei fisici, proposta da Niels Bohr e detta anche di Copenaghen. Pertanto la precedente di De Broglie potremmo associarla alla città di Paris ed in omaggio a questo grande che ha introdotto, nei quanti, il concetto di onda, queste riflessioni vengono esposte anche nella sua lingua.

Nell'interpretazione di Paris la particella mantiene sempre le sue peculiari caratteristiche estremamente localizzate nello spazio ed è guidata, nel suo moto, appunto da un'onda guida mentre per l'altra, di Copenaghen, la particella presenta sempre le proprietà di un'onda eccetto che al momento della misura dove, come mostrano tutte le esperienze, si manifesta con le particolari caratteristiche di una particella. Per interpretare quest'ultimo fatto sperimentale Bohr ha introdotto il concetto di collasso o riduzione dell'onda.

Tutto ciò risulta ben noto e consolidato, però sorprendentemente chi scrive, lavorando per molti anni nel laboratorio dell'Istituto di Idraulica dell'Università di Pisa, nello sperimentare il distacco dei vortici e la turbolenza si è trovato di fronte a delle relazioni analoghe a quelle della meccanica quantistica. Analoghe nel

senso che non contengono la costante di Planck, ma una costante per così dire macroscopica, proporzionale alla viscosità cinematica del fluido stesso.

I precedenti risultati sono stati resi pubblici senza seguito, quindi, a questo punto, si potevano fare solo due cose: ignorare il tutto, considerandolo il frutto di una triviale coincidenza, oppure, con coraggio, continuare per portare l'indagine fino in fondo. È stata scelta questa seconda via che, con meditazioni e riflessioni accurate, ha condotto ad una nuova interpretazione. Risulta infatti possibile considerare lo spazio fisico come il protagonista e non un semplice spettatore degli avvenimenti del mondo dei quanti.

Questa terza interpretazione, una visione originale del mondo fisico, deve essere senz'altro associata alla città di Pisa in omaggio a Galileo che ci ha insegnato ad imparare dalla natura unica vera maestra ed ad usare l'Organum, ossia uno strumento concreto ma anche mentale al tempo stesso. Le presenti riflessioni pertanto, com'è stato accennato, vengono esposte nella lingua di Galileo, successivamente in quelle di De Broglie, e di Newton.

Pisa, maggio 2013.

Capitolo I

Le basi sperimentali.

§ 1. - Premesse.

La transizione alla turbolenza, cioè il passaggio da un moto laminare, regolare ad uno del tutto differente, ossia vorticoso presenta, alla luce dell'esperienza, degli aspetti che possiamo interpretare con modelli, con procedimenti e con strumenti matematici *analoghi* a quelli quantistici che si incontrano nella meccanica atomica. L'aggettivo analogo è d'obbligo perché la costante di Planck, fondamentale nel mondo microscopico, nel nostro caso non entra per niente in gioco. Esiste però una costante, per così dire *macroscopica*, rilevata sperimentalmente, che risulta proporzionale alla viscosità del fluido.

Quindi i modelli quantistici della turbolenza fondano la loro ragione di esistere su valide basi sperimentali.

D'altra parte le numerose esperienze sul distacco dei vortici confermano, come viene esposto in questo lavoro, che per ottenere la formazione di un singolo vortice occorre un ben preciso valore della circuitazione Γ , al di sotto del quale il vortice non può esistere per il semplice fatto che le forze viscosive sono preponderanti e ne impediscono lo sviluppo. Pertanto al di sotto di un valore critico della circuitazione Γ_0 , valore proporzionale alla viscosità¹, non possiamo osservare alcun vortice, mentre al di sopra se ne formerà soltanto uno. Per averne un secondo bisognerà quindi raggiungere il valore $2\Gamma_0$ altrimenti le forze viscosive impediranno il formarsi del secondo. Per esempio se avessimo solamente $1.6\Gamma_0$ esisterebbe nel fluido un'energia sufficiente per il primo vortice, ma non per il successivo.

¹Infatti, come vedremo in seguito: $\Gamma_0 \sim 200\nu$.

Ora dato che i vortici hanno una loro peculiarità: o esistono o non esistono, sarebbe veramente assurdo parlare di mezzo vortice, tre quarti o due quinti, perché ognuno ha una sua individualità. Per esempio, con uno strattagemma sperimentale, possiamo dividerne uno ottenendone due, ma di ciascuno di essi non si può certamente parlare, come individuo, di mezzo vortice, semplicemente adesso abbiamo due vortici.

Occorre qui fare molta attenzione e precisare che, per quanto riguarda la circuitazione, al di sopra dello stato critico, nella turbolenza pienamente sviluppata, dividere a metà un vortice significa ottenerne due ciascuno con una circuitazione $\Gamma/2$, ma allo stato critico quest'operazione ci farebbe scendere sotto il livello minimo Γ_0 e i due vortici si dissolverebbero in un tempo brevissimo.

Quindi, come per le nostre teste, non possiamo parlare, senza cadere nell'assurdo, in termini di numeri reali ma di numeri interi, così diviene altrettanto naturale introdurre i numeri interi e quindi quantici nella turbolenza.

Infatti per ottenere la formazione di un terzo vortice è necessaria una circuitazione $3\Gamma_0$ e così via. Per un numero generico di vortici, occorre una circuitazione $n\Gamma_0$ ed n deve essere per necessità intero ossia *quantico*, con una circuitazione anch'essa quantizzata.

La discretizzazione risulta quindi naturale in questo tipo di fenomeni anche se appartengono al mondo macroscopico e non a quello degli atomi. Non si tratta pertanto di ricercare qualcosa di originale, ma, alla luce dell'esperienza, è la natura stessa delle cose che ci costringe a ragionare in tal modo, essa si svela in tutta la sua semplice realtà: le cose si fanno ovvie, si palesano ai nostri sensi ed alla nostra mente, come scriveva Galileo a proposito di ciò che osservava con il suo strumento.²

Per indagare la turbolenza viene usato il velocimetro a laser, come strumento fisico, ma anche degli apparati intellettuali, ossia il riflettere attentamente sui dati ottenuti. Tutto ciò permette di

²*eadem sensui nostro obviam sese fecerunt.* G. Galilei, Sidereus Nuncius (1610).

individuare una realtà che può essere inquadrata come: *gli aspetti quantistici della turbolenza*.

La turbolenza pienamente sviluppata, come abbiamo visto negli studi precedenti, è un fenomeno prettamente inerziale e pertanto segue le leggi classiche della fisica e della dinamica, come ha dimostrato Prandtl negli scambi della quantità di moto.

Invece in condizioni critiche, cioè quando inizia la sua formazione, che evidentemente non è altro che uno sviluppo di vortici, l'introduzione dei numeri interi, *quantici* e dei metodi analoghi a quelli quantistici della meccanica atomica diviene addirittura una necessità.

§ 2 - Le esperienze sul distacco dei vortici.

La sorgente di turbolenza e quindi di vorticità piú semplice esistente in natura è la doppia scia di vortici che si distaccano da un cilindro di diametro d investito da una corrente uniforme alla velocità U .

All'Istituto di Idraulica dell'Università di Pisa sono state effettuate, con molta cura e precisione, moltissime esperienze in un canale in vetro lungo 9 m, largo 50 cm, alimentato con un circuito idraulico dotato di una torre piezometrica in grado di mantenere sempre un carico costante durante le prove. Una paratoia a valle serviva per controllare i livelli idrici, mentre una serie di griglie a nido d'ape, disposte a monte riduceva la turbolenza d'aspetto a valori dell'ordine di qualche unità percentuale. Mediante il velocimetro laser ad effetto Doppler (LDA) veniva rilevata la velocità sia a monte che a valle dei cilindri di vario diametro d : 0.6, 1, 1.6, 2, 3, 8, 20 mm. Per l'induzione idrodinamica dovuta ai vortici i segnali risultavano quasi sinusoidali e quindi con un'unica riga spettrale alla frequenza di distacco f (Fig. 1). I risultati, di solito in forma adimensionale con il numero di Reynolds ($R = Ud/\nu$) in funzione di quello di Strouhal ($S = df/U$), sono notevolmente dispersi, pertanto i vari parametri vengono qui presentati nelle loro originali dimensioni.

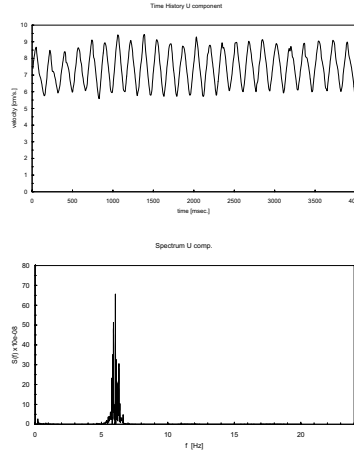


Figura 1: La registrazione del distacco dei vortici a valle del cilindro di 2 mm ed il corrispondente spettro. Si nota il segnale quasi sinusoidale e, nello spettro, un'unica riga alla frequenza di Strouhal. ($t = 11^\circ C$; $U = 7.2 \text{ cm/s}$; $f = 5.9 \text{ Hz}$; $R = 113$; $S = 0.164$).

In tutte le esperienze la frequenza di distacco f risultò correlata in modo semplice alla velocità della corrente U per mezzo di una legge lineare valida per tutti i numeri di Reynolds e per questo proposta come: *la legge generale sul distacco dei vortici*:

$$U - U_o = 2\pi\alpha d(f - f_o), \quad (1)$$

dove U_o e f_o indicano rispettivamente i valori critici sotto i quali il fenomeno non avviene spontaneamente e che corrispondono ai numeri critici di Reynolds e di Strouhal ($R_o = 49$, $S_o = 0.12$). Infatti per velocità inferiori da un ben determinato valore i vortici non si staccano rimanendo aderenti a valle del cilindro. Quindi i valori critici da sostituire nella (1) sono:

$$U_o = 49 \frac{\nu}{d}; \quad f_o = 0.12 \frac{U_o}{d}, \quad (2)$$

dove ν rappresenta la viscosità cinematica del fluido ed α un coefficiente di forma che vale 0.76 per il cilindro. La precedente ha un carattere generale, perché, ad esempio con $\alpha = 0.86$ si possono correlare i dati ottenuti con una barra a sezione quadrata inclinata a losanga. Come si può constatare in figura (Fig. 2), la semplice relazione lineare (1) risulta in ottimo accordo con tutti i dati sperimentali.³

Occorre precisare, a questo punto, che i filamenti vorticosi a valle dei cilindri sono tutti dei vortici di Rankine con un nucleo di raggio a , dell'ordine di grandezza del diametro del filo, che si muove come un corpo rigido:

$$u = \omega r \quad r \leq a,$$

per evitare una singolarità, ossia $u \rightarrow \infty$ quando $r \rightarrow 0$ nella velocità indotta:

$$u = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad r > a.$$

Inoltre questi vortici di Rankine decadono rapidamente a causa della viscosità secondo la relazione:

$$\Gamma = \Gamma_o \left(1 - e^{-\frac{t^2}{4\nu t}}\right).$$

Dove Γ e Γ_o indicano rispettivamente la circolazione al tempo t ed all'istante iniziale. Infatti all'interno del nucleo la viscosità non produce effetto perché nel moto rigido, come in idrostatica, non si formano sforzi tangenziali. Al contrario all'esterno i gradienti di velocità generano delle azioni che, in un breve tempo, fanno dissolvere il vortice.

Allora si presentò un fatto sorprendente che, ancor oggi, suscita stupore: se infatti consideriamo solo i dati ottenuti allo stato

³E. Buffoni: La legge generale sul distacco dei vortici, Pisa 1995 TEP.

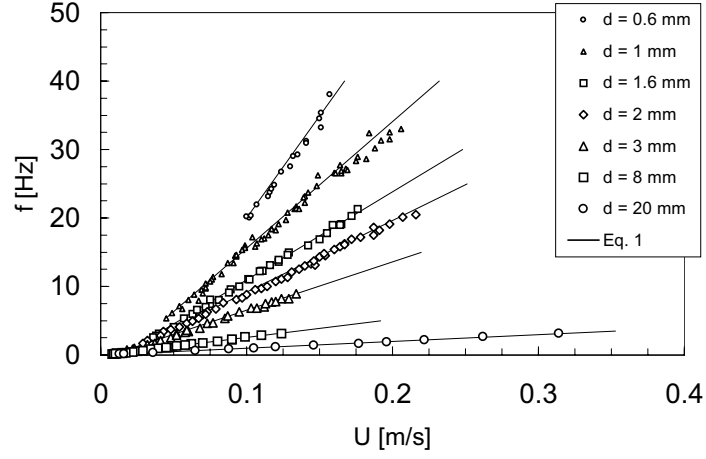


Figura 2: I risultati sperimentali a confronto con la relazione (1).

critico per i diversi diametri, cioè quando il fenomeno ha inizio, essi concordano con le seguenti relazioni:

$$\lambda = 406 \frac{\nu}{U_o}, \quad (3)$$

dove λ rappresenta la lunghezza d'onda, ossia la distanza tra due vortici consecutivi con lo stesso senso di rotazione⁴. Ed ancora:

$$U_o^2 = 406 \nu f_o. \quad (4)$$

Siamo quindi di fronte ad una λ inversamente proporzionale alla velocità e soprattutto ad un'energia, riferita all'unità di massa, appunto U_o^2 , che risulta proporzionale alla frequenza di distacco. La relazione (4) può infatti essere messa nella seguente forma per un confronto più agevole (Fig. 3):

⁴Si noti l'analogia della (3) con la relazione di De Broglie.

$$\frac{U_o^2}{\nu} = 406 f_o. \quad (5)$$

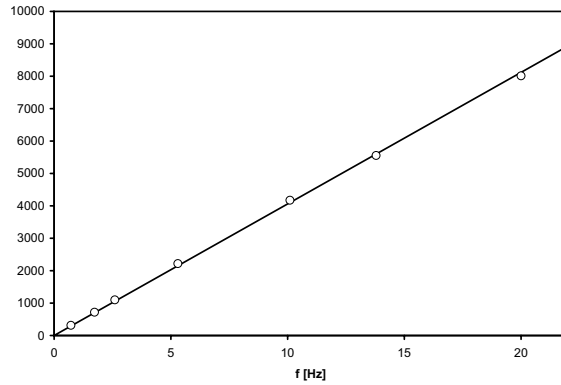


Figura 3: I risultati sperimentali allo stato critico in confronto con la relazione (5).

La (4) quindi rappresenta un'energia in funzione lineare della frequenza, se indichiamo con $k = 406\nu$ la costante, possiamo scrivere in generale:

$$E = kf. \quad (6)$$

Quindi per innescare il fenomeno, per avere l'inizio del distacco, occorre fornire al sistema una determinata quantità di energia, un *quantum* appunto, al di sotto del quale il fenomeno non si presenta per il semplice fatto che le forze viscosse prevalgono su quelle d'inerzia. La costante k è generalmente valida per tutti i

fluidi newtoniani che, in condizioni critiche, ossia per un numeri di Reynolds $R_o \simeq 50$ si comportano tutti allo stesso modo⁵.

§ 3 - Il distacco dei vortici in condizioni subcritiche.

Durante le precedenti ricerche ci si accorse che facendo vibrare opportunamente il filo si potevano osservare i vortici anche in condizioni subcritiche, ossia per numeri di Reynolds inferiori a circa 50. Le vibrazioni venivano provocate da un elettromagnete, eccitato da una corrente sinusoidale, che a sua volta agiva su di un piccolo magnete permanente installato sul filo stesso. Con questo apparato, mediante l'idrolisi, si poteva constatare l'effettiva formazione della scia vorticoso inducendo vibrazioni di piccola ampiezza ma ad una frequenza opportuna. A filo fermo infatti si notava solo un scia di bollicine che si dispiegava verso valle come una bandiera, mentre, con il filo vibrante, si poteva osservare, senza ombra di dubbio, la scia vorticoso trascinata a valle dalla corrente idrica (Fig. 4).

Con questo dispositivo però non era agevole controllare l'ampiezza di oscillazione che dipendeva da quanto la frequenza era più o meno vicina a quella di risonanza. Pertanto venne progettato e costruito un carrello oscillante su guide con bussole a sfera e comandato da una camma variabile azionata da un motore elettrico controllato da un'elettronica in grado di variarne la velocità di rotazione. In questo modo il filo si muoveva di conserva con il carrello alla stessa ampiezza impostata sulla camma. Mediante questo nuovo apparato, utilizzando cilindri con diametri da 0,67 a 2 mm, sono state rilevate, in tempi diversi, le frequenze che producevano il massimo effetto. In pratica per una data velocità della corrente, per $R < 50$, si provvedeva ad eseguire una scansione dalle basse alle alte frequenze, sempre con una piccola ampiezza di oscillazione (0,12 mm), contemporaneamente il velocimetro a laser, puntato a valle del filo, rilevava la presenza dei vortici mediante il segnale di velocità ed il relativo spettro. La frequenza

⁵E.Buffoni: Ricerca sperimentale sul distacco dei vortici, Pisa 1996 TEP.

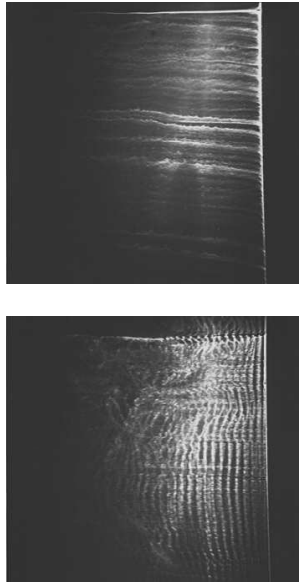


Figura 4: Per $R=30$; sopra notiamo, a filo fermo, le bolle d'idrogeno trascinate come una bandiera, mentre in basso, con il filo vibrante, si osserva una scia vorticosa del tutto simile al distacco spontaneo cioè per $R \geq 50$.

f che provocava il massimo dello spettro veniva assunta come significativa. Naturalmente a questo punto se si fermava il carrello oscillante i vortici scomparivano insieme alla riga dello spettro. Si dimostrava inoltre che il fenomeno dipendeva dalla frequenza e non dalla ampiezza, infatti, sempre per piccole ampiezze, ma per frequenze molto diverse da f , i picchi erano assenti o poco pronunciati, centinaia di volte inferiori a quello massimo. Inoltre è da notare che non sono stati osservati vortici per $R < 25$. Le frequenze f così ottenute sono state elaborate in due modi diversi: in un primo momento è stata semplicemente modificata la relazione

(6) che si ottiene in condizioni critiche quando si deve fornire un *quantum* di energia per ottenere il distacco dei vortici. Tenendo conto del lavoro L necessario per riportare il sistema allo stato critico possiamo quindi scrivere:

$$E = kf - L. \quad (7)$$

In altri termini per avere dei vortici trascinati dalla corrente e quindi con energia media $E = U^2$ occorre fornire un *quantum* di energia diminuito del lavoro L necessario per estrarli.

Il lavoro di estrazione oppure il l'energia necessaria per riportare il sistema allo stato critico risulta essere:

$$L = (U_o - U)^2 \quad (8)$$

e, nella (7) f indica sempre la frequenza dove si ottiene il massimo effetto. Ovviamente, allo stato critico, la (8) si annulla e la (7) si riduce di nuovo alla (6).

I dati sperimentali sono in ottimo accordo con le relazioni (6) e (7), ed inoltre si può notare una profonda analogia tra quest'ultima e al relazione dell'effetto fotoelettrico, però adesso con la costante di quantizzazione non uguale a quella di Planck ma proporzionale alla viscosità cinematica ($k = 406\nu$).

Tuttavia, in un secondo tempo, si è preferito non apportare nessuna correzione ai dati, semplicemente i valori ottenuti per i vari diametri del cilindro sono stati resi adimensionali per poterli confrontare tutti insieme con il modello dell'oscillatore quantizzato. Infatti l'energia media ε di quest'ultimo è espressa com'è noto dalla seguente relazione:

$$\varepsilon = \frac{kf}{e^{\frac{kf}{T}} - 1} + \frac{1}{2}kf, \quad (9)$$

dove con $T = U^2$ viene indicata l'energia con cui il sistema è in contatto. La precedente viene resa adimensionale semplicemente dividendo ambo i membri per kf :

$$\frac{\varepsilon}{kf} = \frac{1}{e^{\frac{kf}{T}} - 1} + \frac{1}{2}. \quad (10)$$

Anche i dati sperimentali, sono stati quindi posti in forma adimensionale considerando i rapporti tra l'energia fornita dall'oscillatore al picco di massima energia $w = kf$, e la corrispondente allo stato critico kf_o . Infatti $w = \varepsilon$ può essere considerata come l'energia media dell'oscillatore da fornire al fluido, mediante le oscillazioni, per provocare il distacco dei vortici. Allo stesso modo in ascissa dobbiamo dividere l'energia cinetica T per il quantum allo stato critico kf_o :

$$\frac{w}{kf_o} = \frac{1}{e^{\frac{kf_o}{T}} - 1} + c. \quad (11)$$

Ora se il fenomeno seguisse il modello dell'oscillatore classico i dati si dovrebbero allineare sulla retta inclinata perché l'energia media dell'oscillatore sarebbe sempre uguale all'energia cinetica della sorgente con cui è in contatto, ossia: $w = T$. Questo in pratica avviene dallo stato critico in poi, cioè per $T/kf_o \geq 1$, ma per valori inferiori i dati deviano dalla retta e seguono, sia pur con una certa dispersione, le relazioni (10) e (11) con un valore della costante c compreso tra 0.42 e 0.5. Il valore 0.42 è stato assunto per avere l'uguaglianza allo stato critico. Possiamo quindi concludere che i dati sperimentali si accordano con il modello dell'oscillatore quantizzato⁶ (fig. 5).

Questo modello può essere impiegato anche per prevedere i valori critici del numero di Reynolds e di Stouhal. Infatti l'oscillatore quantizzato può assumere diversi stati, ognuno con una corrispondente energia $\varepsilon_n = kfn$, occorre quindi valutarne l'energia media. La trattazione riportata da Fermi considera l'energia totale depurata dall'energia fondamentale ($w = \varepsilon - 1/2kf$) per un oscillatore quantizzato in contatto con una fonte di energia T :

⁶E. Buffoni L'Idrodinamica dei quanti, Pisa 2008 ETS. ISBN 978-884672321-S.

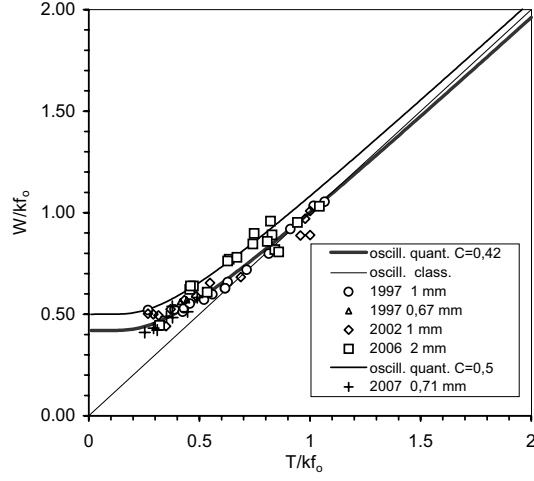


Figura 5: I risultati sperimentali in forma adimensionale, ottenuti con i fili oscillanti, a confronto con il modello dell'oscillatore quantizzato.

$$w = \frac{kf}{e^{\frac{kf}{T}} - 1}. \quad (12)$$

Se facciamo tendere a zero il quantum di energia kf , si osserva che w tende a T , l'energia media si riduce al caso dell'oscillatore classico che, all'equilibrio statistico, ha la stessa energia della sorgente con cui è in contatto. In sostanza per valori dell'energia media superiori al quantum kf abbiamo in comportamento sostanzialmente classico, invece per valori inferiori si ha una deviazione dalla legge classica secondo la relazione (12). In ultima analisi, il distacco spontaneo dei vortici si innesca, quindi si raggiunge lo stato critico, quando il sistema assume un quantum di energia, cioè $kf/T = 1$. Pertanto possiamo utilizzare la relazione

(12) per calcolare teoricamente i valori critici iniziali della frequenza e della velocità. Infatti $\varepsilon = T = a^2\omega^2$ per $kf/T = 1$ e $a = d$, otteniamo la frequenza critica f_o :

$$f_o = \frac{k}{(2\pi d)^2(e-1)}. \quad (13)$$

Inoltre essendo $f_o = U_o^2/k$ possiamo calcolare la velocità critica:

$$U_o = \frac{k}{(2\pi d)\sqrt{e-1}}. \quad (14)$$

I valori calcolati con le espressioni precedenti sono in accordo con i dati sperimentali. Tuttavia possiamo renderli adimensionali calcolando i numeri di Reynolds e di Strohual critici: $R_o = U_o d/\nu$ e $S_o = f_o d/U_o$, con $k/\nu = 406$:

$$R_o = \frac{k/\nu}{2\pi\sqrt{e-1}} = 49 \quad (15)$$

$$S_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{e-1}} = 0.12, \quad (16)$$

entrambi i valori sono in pieno accordo con l'esperienza. Pertanto in ultima analisi l'oscillatore allo stato critico può assumere diversi livelli energetici, però tutti questi, tranne quello fondamentale, sono supercritici e perciò instabili, per cui il sistema ricade sul livello immediatamente inferiore emettendo quanti di energia kf e quindi vortici alla frequenza f .

§ 4 - La limitazione delle celle nello spazio delle fasi.

Lo spazio delle fasi è costituito, com'è noto, da sei dimensioni: le tre coordinate ordinarie ed inoltre le tre componenti della quantità di moto. In un fluido, se ci riferiamo all'unità di massa, quest'ultime si riducono alle componenti della velocità. Un punto dello spazio delle fasi rappresenta completamente lo stato dinamico del sistema e prende il nome di punto rappresentativo. Per

eseguire una statistica su di un sistema costituito da numerose particelle occorre dividere lo spazio delle fasi in cellette $\Delta x_i \Delta u_i$ di dimensione arbitraria, tale dimensione, infatti, deve soltanto seguire dei criteri pratici: celle troppo piccole conterranno pochi punti rappresentativi provocando una notevole dispersione, mentre delle celle troppo grandi ridurranno la risoluzione della statistica. Nel caso di un fluido perfetto dobbiamo necessariamente seguire questo criterio esclusivamente pratico, invece per un fluido newtoniano in moto turbolento la dimensione delle celle deve rispettare la seguente relazione ($i = 1, 2, 3$):

$$\Delta x_i \Delta u_i \geq R\nu \quad (17)$$

che rappresenta la condizione di esistenza della turbolenza, comprendendo, con l'uguaglianza, anche la transizione. R indica un numero di Reynolds critico che, moltiplicato per la viscosità cinematica ν fornisce il valore di una costante. Il volume delle celle non può essere arbitrario perché se la (17) non è soddisfatta, cioè il loro valore è minore di $R\nu$, si vanno a considerare zone di fluido in moto laminare.

L'esperienza, come l'instabilità dello strato limite di Blasius, ci suggerisce inoltre che la transizione avviene per oscillazioni di lunghezza λ correlata alla velocità dalla seguente relazione analoga a quella di De Broglie:

$$\lambda = \frac{K}{u} \quad (18)$$

dove K indica la costante di quantizzazione universale, valida per tutti i fluidi, che assume il valore $K = 2550\nu$ ed ha le dimensioni di un'azione per unità di massa. Le osservazioni sperimentali suggeriscono che per i fenomeni di instabilità dello strato limite deve essere considerata la costante K , mentre $k = K/2\pi$ appare nel distacco dei vortici. Questo fatto trova giustificazione nel modello dell'oscillatore di torsione con pulsazione $\omega = f$ perché un vortice si stacca quando il sistema ha compiuto un'oscillazione torsionale

completa; pertanto è giusto porre $E = k\omega$, con $k = K/2\pi$, abbiamo quindi un'unica costante di quantizzazione valida per tutti i fluidi newtoniani: $K = 2550\nu$.

Per i fenomeni ondulatori vale il teorema fondamentale di Fourier dove si afferma che la lunghezza Δx di un pacchetto d'onde e la riga spettrale corrispondente $\Delta\kappa$ esiste la seguente relazione:

$$\Delta x_i \Delta \kappa_i \geq \frac{1}{2} \quad (19)$$

dove con $\kappa = 2\pi/\lambda$ si indica un numero d'onda. Introducendo il numero d'onda nella (18) e sostituendolo nella (19) otteniamo:

$$\Delta x_i \Delta u_i \geq \frac{K}{4\pi}. \quad (20)$$

Quindi la costante R della (17) assume un valore pari a 203. Indicando con $k = K/2\pi$ la (20) prende la seguente forma:

$$\Delta x_i \Delta u_i \geq \frac{k}{2} \quad (21)$$

la costante k vale quindi 406ν . Il significato fisico delle (20) e (21) è il seguente: data una fluttuazione di velocità Δu , l'energia fornita dal moto medio non è sufficiente per estrarre pacchetti di dimensioni inferiori a Δx , le forze viscosive non lo consentono. Inoltre se nella (21) poniamo $\Delta x = \lambda$ e $\Delta u = U$, dato che lo sviluppo di un vortice in rotazione può essere visto come $\lambda = 2\pi r$ e che, per definizione, abbiamo $\Gamma = 2\pi r U$, otteniamo⁷:

$$\Gamma \geq 203\nu$$

che, nell'uguaglianza, rappresenta proprio il minimo valore della circuitazione al di sotto del quale il vortice non esiste perché le forze viscosive ne impediscono lo sviluppo.

Il lettore attento avrà riconosciuto a questo punto la profonda analogia esistente tra le relazioni precedenti e la disuguaglianza di Heisenberg della meccanica quantistica. Si tratta di un'analogia

⁷Quindi λ può essere considerata come una scala della turbolenza.

solo formale, ovviamente qui siamo nel campo dei fenomeni macroscopici indipendenti dalla costante di Planck, tuttavia, per i fluidi newtoniani, esiste una costante di quantizzazione K proporzionale alla viscosità che interviene nella transizione alla turbolenza e nello strato limite.

Tuttavia risulta molto importante il collegamento tra la relazione di tipo Heisenberg ed il numero di Reynolds, perché questa non esprime altro che l'esistenza di un moto turbolento, un'osservazione fondamentale come vedremo in seguito.

Vediamo infatti adesso l'applicazione di questi concetti ai getti di fluido.

§ 5 - Le esperienze sui getti di fluido.

Negli anni venti del secolo scorso Ludwig Prandtl, per spiegare i profili di velocità media in moto turbolento, introdusse un modello di scambi della quantità di moto analogo alla teoria cinetica dei gas con la variante di parlare di mescolamento anziché di urto. Ipotizzò la formazione di aggregati di fluido che per un certo tempo e spazio mantenevano la loro identità prima di mescolarsi e cedere così la propria quantità di moto. Questo modello ebbe molto successo nel prevedere l'andamento della velocità media lungo una parete.

Nell'applicare questi concetti ai getti di fluido dobbiamo considerare un gran numero di quasi particelle, come una sorta di gas, esse escono da un orifizio e si sparpagliano come pallini da caccia e, per le molteplici cause che influenzano le loro traiettorie, certamente molto complicate, ci dobbiamo aspettare una distribuzione casuale gaussiana. Ciascuna particella trasporta una certa quantità di moto e quindi nella regione dove ne arrivano in maggior numero dobbiamo aspettarci una velocità media più elevata. In sostanza se è vera l'ipotesi di Prandtl allora la velocità di un getto di fluido dovrebbe anch'essa essere distribuita secondo una campana di Gauss.

Moltissime misure eseguite sui getti liberi mostrano proprio la

classica forma della distribuzione casuale. Anche presso l'Istituto di Idraulica di Pisa sono state eseguite delle esperienze su di un getto d'aria circolare di 12 mm di diametro. La figura seguente (Fig. 6) mostra che le velocità medie sono in ottimo accordo con la curva di Gauss.⁸

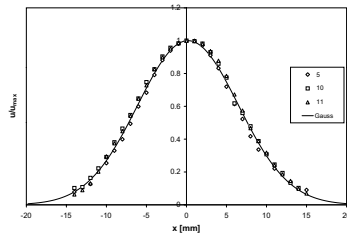


Figura 6: La distribuzione di Gauss a confronto con i dati sperimentali in un getto d'aria turbolento.

Pertanto il modello corpuscolare della turbolenza, proposto da Prandtl, risulta valido anche per un moto completamente diverso da quello lungo una parete.

Anche gli studi numerici del presente autore sui getti, con codici di calcolo fluidodinamici (CFD), usando per esempio un modello di turbolenza come il $k - \epsilon$, mostrano lo stesso andamento delle velocità medie.

Infine le misure sugli aerosol forniscono delle concentrazioni in ottimo accordo con la curva di Gauss. Infatti i vortici, le quasi particelle di fluido, che trasportano la quantità di moto sono in grado anche di catturare e trasportare ciascuna qualche gocciolina di aerosol. Pertanto dove queste quasi particelle sono numerose possiamo trovare sia una maggior quantità di moto, sia una concentrazione di aerosol più elevata, naturalmente sempre con una distribuzione gaussiana.

⁸E. Buffoni La natura della turbolenza, Pisa 1999 ETS.

Questo per valori mediati nel tempo, ma se andiamo a considerare ed a riflettere sulle fluttuazioni di velocità istantanee e quindi su getti osservati per un breve intervallo di tempo, si possono senz'altro comprendere con più chiarezza le disuguaglianze viste nel paragrafo precedente. Infatti nell'ipotesi verosimile che alle piccole scale della turbolenza vi sia l'isotropia delle velocità e delle corrispondenti fluttuazioni, per cui possiamo porre $\Delta u_i = \Delta u$ con $i = 1, 2, 3$. Indicando con U il valor medio della corrente in un certo istante abbiamo: $u = U + \Delta u$, con $\Delta x \Delta u \geq R\nu$, come visto in precedenza. Quindi se la fluttuazione Δu è dello stesso ordine di grandezza del valor medio abbiamo, per quell'intervallo di tempo, una notevole incertezza della u .

Consideriamo infatti un getto largo Δx e le corrispondenti fluttuazioni di velocità Δu a valle dell'apertura. Se il fluido entra da sinistra per un'apertura larga, con il numero di Reynolds R , avremo dei bassi valori della fluttuazione e quindi una maggior certezza sulla velocità essendo questa più uniforme. Però la posizione di una generica particella, indistinguibile dalle altre, sarà molto incerta perché essa potrà passare in qualsiasi punto della larga apertura (Fig. 7).

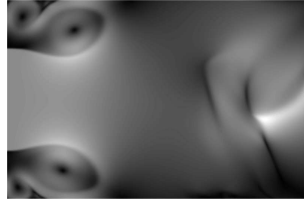


Figura 7: Il fluido entra da sinistra per una fessura Δx molto larga, le fluttuazioni Δu sono piccole e quindi, nella zona a valle la u è ben determinata; ma una generica particella può entrare un qualsiasi punto di Δx e quindi la sua posizione risulta indeterminata.

Al contrario, per avere una maggior certezza sulla posizione dovremmo adottare una gola stretta, ma in questo caso, per lo

stesso numero di Reynolds, Δu avrà un valore certamente molto più elevato e quindi avremo una velocità indeterminata (Fig. 8).

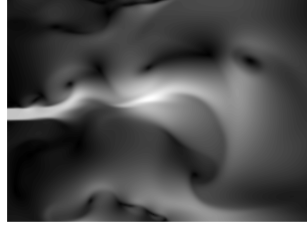


Figura 8: Il fluido entra da sinistra per una fessura molto stretta, la posizione di una particella risulta con maggior certezza perché compresa nel piccolo intervallo Δx ; però le fluttuazioni della velocità sono grandi per la turbolenza e quindi la u , in una vasta zona a valle della fessura, risulta del tutto indeterminata.

In ultima analisi le relazioni viste nel paragrafo precedente sono legate alla turbolenza ed al numero di Reynolds, questo chiarisce enormemente tutte le considerazioni sull'indeterminazione delle grandezze che lo compongono, che corrispondono alla dimensione, limitata inferiormente, delle celle nello spazio delle fasi $\Delta x \Delta u \geq R\nu$. Per questo fatto, cioè per la turbolenza, non è possibile avere contemporaneamente e con la stessa certezza, informazioni sulla posizione e sulla velocità, l'una va a scapito dell'altra.

§ 6 - Un'esperienza ideale nell'elio liquido.

Com'è noto nell'elio liquido ${}^4\text{He}$, a bassissime temperature, ossia per $T \simeq 1^\circ\text{K}$, si forma una condensato di Bose-Einstein BEC dove, secondo la teoria di Landau, coesistono due stati: uno ordinario dotato di viscosità e l'altro ad entropia nulla, isolato, che quindi si comporta, in certe condizioni di capillarità, come *superfluido* cioè senza resistenze ed attriti, inoltre presenta delle particolari proprietà quantistiche.

Prendiamo un recipiente cilindrico contenente questo liquido e lo poniamo in rotazione attorno all'asse verticale; la superficie si deforma secondo un paraboloide di rivoluzione per effetto della forza centrifuga. Se partiamo da fermo incrementando gradualmente la velocità angolare, da un certo valore critico in poi osserviamo la formazione di vortici ad asse verticale, uno alla volta: uno dopo l'altro si dispongono, per ragioni di equilibrio, secondo i vertici di triangoli equilateri ed, in superficie, hanno un diametro dell'ordine del millimetro. Questo fatto, apparentemente strano, risulta del tutto chiaro se ripensiamo alle considerazioni precedenti del § 1. Infatti fino a che non forniamo al fluido quantistico di viscosità cinematica $\nu = h/m$ (dove h è la costante di Planck ed m la massa dell'atomo ${}^4\text{He}$) una circuitazione: $\Gamma_o = h/m$ non si può formare nessun vortice perché le forze viscosive lo impediscono.⁹ Per avere il secondo occorre una circuitazione $2\Gamma_o$, e così via per il terzo fino ad arrivare agli n vortici, con una circuitazione che risulta quindi quantizzata:

$$\Gamma = \frac{h}{m}n. \quad (n = 1, 2, 3, \dots n.) \quad (22)$$

Siamo in presenza di uno strano fluido che, in questo caso, non si comporta come perfetto come comunemente si crede. Infatti, per i teoremi sulla vorticità in idrodinamica, se il fluido si comportasse come tale, i vortici, una volta generati, continuerebbero a ruotare per sempre. Al contrario si presenta come viscoso anche se con una bassa viscosità cinematica (che può essere dell'ordine di $\nu = h/m \simeq 10^{-7}[\text{m}^2/\text{s}] = 0.1cSt$, praticamente identica a quella del mercurio). Se la circuitazione è inferiore a $\nu = h/m$ non si può formare nessun vortice perché le forze viscosive lo impediscono. Solo quando la circuitazione, fornita dall'esterno, è sufficiente possiamo avere gli n vortici secondo la relazione (22). Al termine dell'esperimento, una volta fermato il recipiente, a circuitazione nulla, i vortici si dissolvono come accade in un fluido ordinario.

⁹Infatti la circuitazione è formata da una grandezza lineare per una velocità, pertanto Γ/ν costituisce un numero di Reynolds che, com'è noto, rappresenta il rapporto tra le forze d'inerzia e quelle viscosive.

Il fatto di essere a bassissime temperature rende la materia estremamente ordinata ma, se ci pensiamo bene, il tutto appare analogo all'inizio della turbolenza, alla transizione: se abbiamo un eccesso di energia cinetica, piú di quella che le forze viscosse possano contrastare, esso si traduce in movimento che si svolge attorno a dei singoli atomi, secondo linee vorticosse quantizzate, ma appena l'energia cinetica fornita dall'esterno viene meno tutto si dissolve come se non fosse mai esistito. Questo non è certamente il comportamento di un fluido perfetto ed è probabilmente dovuto alla fase ordinaria come ipotizzato da Landau. Tuttavia il moto attorno alla linea vorticosca è irrotazionale con un profilo iperbolico ed una velocità indotta in direzione delle circonferenze di raggio r :

$$u = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad (23)$$

come accade nel vortice di Rankine con i fluidi ordinari.

Pertanto, per precisare e chiarire ulteriormente, consideriamo di nuovo il recipiente che ruota con una $\Gamma < \Gamma_o$: il fluido si muove attorno all'asse come un corpo rigido e la superficie non è altro che un paraboloide di rivoluzione. Tutto cambia quando si raggiunge $\Gamma = \Gamma_o = h/m$, un atomo di elio, uno a caso fra tanti, assorbe l'intero quantum di circuitazione e si attiva il primo livello della (22)¹⁰ mettendosi in rotazione come un vortice di Rankine, cioè con un nucleo rigido dell'ordine dell'Å ed all'esterno con velocità in accordo con la relazione (23). All'aumentare della ω del recipiente cilindrico altri atomi assorbono ciascuno un quanto e così le linee vorticosse, parallele all'asse di rotazione, aumentano seguendo la (22). Solo per ragioni di equilibrio tra le mutue velocità indotte si dispongono poi secondo una maglia triangolare. Tutto il sistema quindi si comporta in modo quantistico come un atomo di idrogeno che ha il momento angolare in accordo con la (22).

¹⁰Dal quanto di circuitazione si passa al quanto di energia ε moltiplicando per la massa e la frequenza di rotazione: $\varepsilon = hf = \hbar\omega$.

Riconsideriamo adesso proprio la (22) dove $\Gamma = 2\pi ru$, come per la l'atomo di Bohr la circonferenza deve essere ricoperta da un numero intero di lunghezze d'onda n , cioè $\lambda = 2\pi rn$, con questa posizione la (22) si trasforma nella relazione di De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{mu} = \frac{\nu}{u}. \quad (24)$$

Pertanto il quanto di circuitazione si ottiene quando lungo la circonferenza del nucleo vorticoso si dispiega almeno un'intera lunghezza d'onda. Di conseguenza la velocità u ha un valore massimo ν/λ per poi diminuire con il raggio r secondo la (23).

Infine occorre spiegare come i vortici siano molto profondi, fatto questo incompatibile con il diametro osservato di circa un millimetro. A questo proposito bisogna osservare che il profilo iperbolico di un vortice presenta certamente diametri molto più ampi in superficie che in profondità, dove nel nostro caso la larghezza dovrebbe essere a scala atomica cioè dell'ordine dell'Å. Infatti, per esempio, con il raggio del vortice $a = 3 \text{ \AA}$, per avere una circuitazione $\Gamma = 2\pi au = h/m$ occorre una velocità $u = 53 \text{ [m/s]}$. Dall'idrodinamica sappiamo che la profondità di un vortice è data da u^2/g , in questo caso 287 m, pertanto i vortici si devono estendere fino al fondo del recipiente.

Nei fluidi newtoniani un fenomeno del genere non può avvenire sia per il valore elevato della costante: $k/2 = 203\nu$, sia soprattutto perché non esiste un nucleo equivalente all'atomo di elio, attorno al quale si possa formare un moto irrotazionale.

Quando invece un corpo esiste, come per esempio un filo, abbiamo visto sperimentalmente, nei § 2 e 3, le linee vorticose che si distaccano trascinate dal flusso (Fig. 4).

Tutto questo ci fa riflettere sulle analogie tra il mondo dei quanti con la cosiddetta *quantum turbulence* QT e la turbolenza nei comuni fluidi newtoniani, la *common turbulence* CT. Esistono indubbiamente degli aspetti che, usati in modo appropriato, possono portare ad una maggior comprensione oltre che ad interessanti sviluppi in entrambe.

§ 7 - Un'esperienza ideale nello spazio.

Consideriamo una particella quantistica come un elettrone, un fotone od altro, non ha importanza, essa viene emessa da una sorgente e rivelata da un apparato di misura appropriato che per semplicità lo pensiamo come uno schermo sensibile. Se la sorgente è molto lontana lo schermo può senz'altro essere piano, (Fig. 9) altrimenti sarà curvo come una calotta sferica, ma anche questo non riveste molta importanza. Ciò che conta è che tale rivelatore è progettato per captare le particelle provenienti dalla sorgente e che questa è talmente debole da emettere le particelle una alla volta ed in modo isotropo in tutte le direzioni.

Mettiamo in funzione la sorgente ed osserviamo: le particelle scintillano e si manifestano sullo schermo rivelatore n. 1 come dei puntini, all'inizio molto radi, poi, al passare del tempo, si infittiscono e per l'isotropia, si distribuiscono casualmente su tutto lo schermo (Fig. 10).

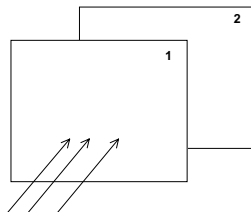


Figura 9: Il sistema di misura è formato da due schermi consecutivi, uno dietro l'altro, in modo da rilevare le particelle incidenti anche sul primo, dove possono essere praticate delle aperture.

Ora, secondo l'interpretazione di Copenaghen, una particella viaggia sempre come un'onda. Se, come in questo caso, la sorgente è molto lontana, il fronte d'onda risulta praticamente piano ed è quindi logico aspettarci una distribuzione uniforme come in figura (Fig. 10). Però in qualsiasi tipo di strumento esistente si rilevano

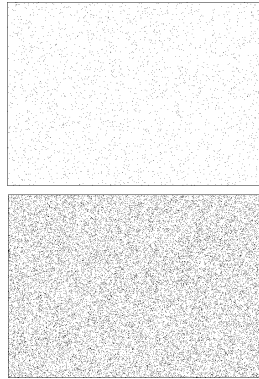


Figura 10: In assenza di aperture le particelle vengono registrate solo sul primo schermo come dei puntini, all'inizio radi, poi, al passare del tempo, si infittiscono e per l'isotropia, si distribuiscono casualmente ed in modo uniforme.

sempre delle particelle con le loro caratteristiche estremamente localizzate nello spazio. Per questo Bohr ha introdotto un principio di complementarità secondo cui l'onda collassa istantaneamente al momento della misura, quindi, in questo caso, è lo schermo stesso che provoca il collasso o la riduzione dell'onda.

Se però nello schermo di area S esiste un piccolo foro od una fessura entrambi con un'area $\sigma \ll S$, quindi tale che il fronte d'onda piano non ne venga minimamente influenzato, nessuna onda, secondo questo principio, dovrebbe oltrepassare lo schermo.

Per verificare poniamo un secondo schermo rivelatore (n. 2) dalla parte opposta alla sorgente, (Fig. 9) dietro al primo ed osserviamoli entrambi. Con sorpresa scopriamo che alcune particelle, all'incirca $n\sigma/S$, dove n è il numero che, nello stesso tempo, sono arrivate sul primo schermo, vengono rilevate dallo schermo 2 (Fig. 11). Quindi hanno attraversato la piccola apertura proprio tutte quelle che avevano la probabilità di cadere nell'area σ del n. 1, come ci aspettiamo dal comportamento di particelle che

viaggiano a caso nello spazio.

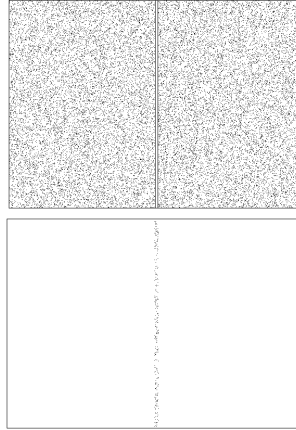


Figura 11: Sopra vediamo le n particelle che vengono rivelate dal primo schermo di area S dove vi è stata praticata una piccola fessura di area $\sigma \ll S$. In basso si osservano le $n\sigma/S$ particelle che l'hanno attraversata e vengono rivelate dallo schermo n. 2.

Un'obiezione simile fu presentata da Renninger e viene detta *esperienza con risultato negativo* proprio perché si ottiene un risultato negativo sul primo schermo quando l'onda collassa sul secondo.

Non esiste per questa una risposta plausibile infatti non è concepibile come faccia un'onda ad ignorare il primo schermo con una superficie importante, in grado da provocarne il collasso, per poi attraversare la piccola fessura, o addirittura un forellino e collassare quindi sul secondo schermo.

Al contrario se invece pensiamo a delle particelle tutto diviene immediatamente chiaro e semplice perché la probabilità di colpire uno schermo è proporzionale alla sua superficie pertanto avremo più scintillamenti sul primo strumento che sul secondo in pieno accordo con l'esperienza.

Però esistono anche le onde di De Broglie come accade se poniamo lo schermo n. 2 più lontano ed prolunghiamo l'osservazione per un tempo maggiore, allora si manifesta una tipica figura di diffrazione cioè la particelle, anche se emesse una alla volta, si dispongono in maggior numero dove la funzione della diffrazione da una fessura o da un foro, espressa dalla relazione:

$$\text{sinc}^2 u = \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2$$

assume i valori massimi (Fig. 12), mentre sul n. 1 si osserva sempre una distribuzione uniforme (Fig. 10).

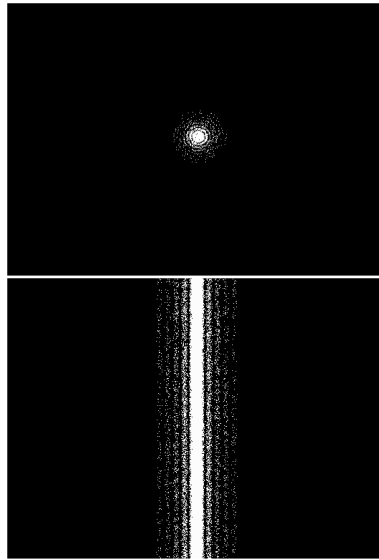


Figura 12: Le particelle si dispongono sul secondo schermo con una tipica figura di diffrazione: in alto da un forellino ed in basso da una piccola fessura (Fig. 14).

Inoltre se sul primo schermo abbiamo due piccole fessure, ad una distanza dell'ordine di λ l'una dall'altra, n particelle scintillano sempre sul primo, in modo uniforme come in Fig. 10, mentre $2n\sigma/S$ passano dalle due fessure per formare, una dopo l'altra, una figura di interferenza sul secondo (Fig. 13).

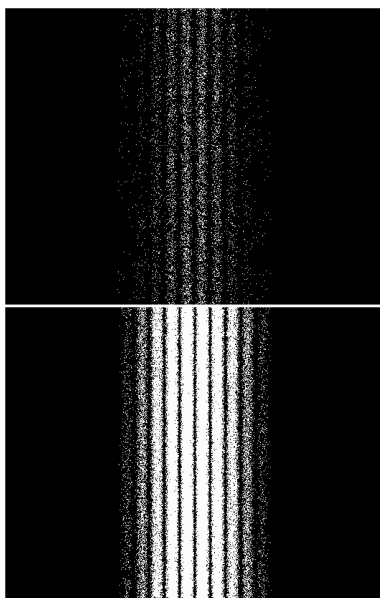


Figura 13: Le particelle si accumulano, sul secondo schermo, una ad una, in modo da formare una tipica figura di interferenza da due fenditure.

Siamo quindi di fronte ad un vero e proprio rompicapo, le particelle passano effettivamente dalle fessure l'una indipendente dall'altra, poi si accumulano con una distribuzione statistica assimilabile alle leggi dell'ottica ondulatoria.

L'interpretazione di Copenaghen, adottata dalla maggior parte dei fisici, alla luce del presente esperimento ideale, diviene non realistica per due ragioni. La prima è la prova di Renninger, qui

presentata un'altra forma ma pur sempre valida. Il collasso diviene molto improbabile perché le onde dovrebbero, a rigor di logica, sempre collassare sullo strumento più vicino alla sorgente senza risultati negativi. Secondo l'interpretazione di Copenaghen infatti il collasso delle onde dovrebbe avvenire solo sul primo schermo perché provocato dalla presenza dello schermo stesso, cioè da un sistema di misura. Ma come può accadere che delle onde lanciate una alla volta, quindi in modo indipendente, sappiano organizzarsi, calcolare la probabilità di attraversare una fessura od un forellino, decidere tra di loro quali passano e quali no, per poi alla fine alcune andare a collassarsi sul secondo?

La seconda è più concettuale, se una popolazione statistica segue una distribuzione, per esempio gaussiana, non ha nessun senso parlare di collasso della distribuzione per ogni singolo risultato. Per esempio nel gioco irlandese delle freccette, possiamo senz'altro pensare ad una campana di Gauss che si estende su tutto il bersaglio, con uno scarto più o meno grande a seconda della bravura del lanciatore. Ma che senso ha affermare che quando una singola freccetta colpisce lo schermo l'intera gaussiana collassa? Lo stesso ragionamento vale per una qualsiasi distribuzione statistica, sempre valida per tutta la popolazione, per tutti i risultati e non per uno singolo.¹¹

Occorrono ordine e metodo, partiamo quindi dai dati di fatto: esistono le particelle e si accumulano seguendo leggi statistiche, casuali, riconducibili all'ottica ondulatoria.

L'importanza del caso dobbiamo tenerla sempre ben presente. Infatti se consideriamo la funzione di diffrazione attraverso una fessura, la $\text{sinc}^2 u$, notiamo che la parte principale, la più importante, si avvicina molto alla distribuzione di Gauss (Fig. 14) confermando quindi la casualità delle distribuzioni di particelle viste in precedenza.

In conclusione, tenendo conto di tutto questo, possiamo risolvere il rompicapo solo se sappiamo porci le giuste domande per

¹¹I seguaci della scuola di Copenaghen parlano dell'insieme delle potenzialità di misura contenute nella funzione d'onda.

poi, con ordine e metodo, giungere alla soluzione fornendo delle riposte sensate, ma sempre con l'aiuto della natura, *unica vera maestra*.

§ 8 - Le domande fondamentali.

Alla luce di quanto visto ed analizzato nei paragrafi precedenti possiamo e dobbiamo porci le seguenti cinque domande fondamentali per la comprensione degli aspetti quantistici:

- 1) perché il momento angolare, nell'atomo di H, è quantizzato?
- 2) Perché l'elettrone non cade mai sul nucleo?
- 3) Qual'è il significato delle relazioni di indeterminazione?
- 4) Qual'è la natura dell'onda di De Broglie?
- 5) La non località quantistica può essere spiegata correttamente e con semplicità?

La prima domanda è importante perché Bohr ne ha ipotizzato l'esistenza senza nessuna spiegazione, un semplice assioma, ma come accennato in precedenza, esso è legato alla circuitazione.

La seconda risulta collegata strettamente alla prima perché Bohr ha formulato la quantizzazione del momento angolare proprio per spiegare la non emissione di energia elettromagnetica da parte dell'elettrone rotante attorno al nucleo.

Le onde introdotte da De Broglie hanno ancor oggi un significato alquanto nebuloso, ma sicuramente legato alla probabilità e quindi al caso, così come le relazioni di indeterminazione. Però abbiamo visto come quest'ultime, per un fluido, non rappresentino altro che un limite inferiore al numero di Reynolds e quindi una condizione di esistenza del moto turbolento.

L'ultima domanda infine che ha impegnato molto i fisici in discussioni infinite a proposito del paradosso EPR e della disuguaglianza di Abell in merito all'interpretazione di Copenaghen ed alla sua completezza.

A questo punto osserviamo che molti tentativi sono stati fatti per una maggior comprensione delle questioni quantistiche, ricordiamo brevemente i principali: l'idrodinamica di un *fluido fittizio*

di Madelung, a *fluid with irregular fluctuations* di Bohm ed infine la *thermodynamique cachée des particules* dello stesso De Broglie.

Nessuno però ha mai considerato un elemento che c'è ma non si nota, non attira l'attenzione di nessuno. La domanda principale è: che cosa percorrono tutti queste entità quantistiche come le particelle o le onde?

La risposta non può che essere: lo spazio, certo lo spazio, l'elemento che non si nota, come lo zerbino su cui poniamo i piedi od il palcoscenico calcato dagli attori al quale nessun spettatore presta mai attenzione.

Invece noi dobbiamo proprio indagare in questa direzione perché forse non è un semplice ente passivo, ma il protagonista.

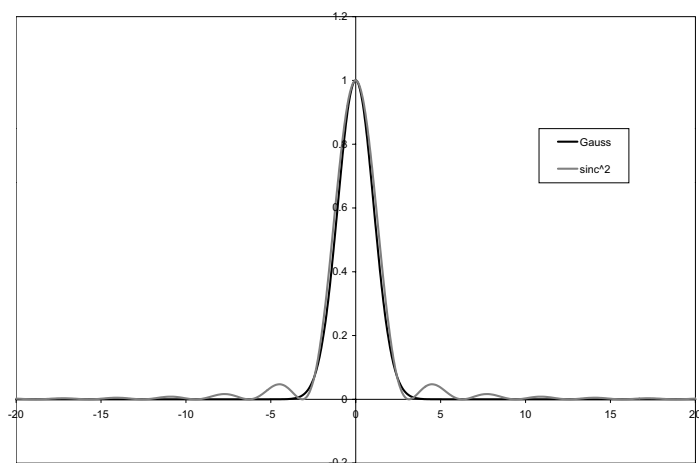


Figura 14: La funzione di diffrazione al quadrato a confronto con la distribuzione casuale di Gauss.

Capitolo II

La teoria generale dello spazio fluido.

§ 1. - Premesse.

Si sospetta che lo spazio sia in realtà un condensato di Bose-Einstein BEC formato da bosoni primordiali, i gravitoni, che si condensarono in un continuum. Considerando una lunghezza d'onda dei gravitoni di 0.01 \AA ed una concentrazione di 10^{36} il tutto avvenne ad una temperatura di condensazione dell'ordine di $T \sim 10^9 \text{ }^\circ K$; in seguito, per l'espansione dell'universo, si è abbassata: $T \rightarrow 0^\circ K$. Anche un continuum del genere, praticamente un fluido, deve possedere delle proprietà caratteristiche come la densità e la viscosità. Per quanto riguarda la prima, non avendo lo spazio una densità intrinseca, risulta solo dovuta ad una particella di massa m che si muove in un volume accessibile σ , ossia $\rho = m/\sigma$. La viscosità cinematica ν invece risulta legata la costante di Planck h ed assume un significato solo in presenza della massa di una particella: $\nu = h/m \text{ [m}^2/\text{s]}$. La viscosità dinamica quindi sarà $\mu = \rho\nu = h/\sigma \text{ [(N/m}^2) \cdot \text{s]}$, ossia dipendente dalla costante di Planck. Pertanto questa costante rappresenta la capacità dello spazio stesso ad opporsi localmente a delle deformazioni o fluttuazioni provocate dal moto della particella. In sostanza possiamo distinguere due regioni: a) il volume accessibile alla particella con una certa viscosità ν ; b) la parte esterna, ad entropia nulla, un superfluido con $\nu = 0$, quindi da considerare perfetto nel senso che un vortice, una volta formatosi, non può mai decadere, cioè dissolversi per effetto delle azioni viscosi.¹

¹Una curiosità: nell'atomo di idrogeno al livello fondamentale il volume accessibile σ risulta una sferetta con un raggio di 0.53 \AA identica al primo orbitale $1s$. Dal calcolo $\mu = h/\sigma$ otteniamo una viscosità dinamica pari a $1.062 \cdot 10^{-3} \text{ [(N/m}^2) \cdot \text{s} \equiv (J \cdot \text{s})/\text{m}^3]$ ossia quella dell'acqua a $\sim 18^\circ C$!

§ 2. - Le equazioni fondamentali.

In generale per un fluido viscoso valgono le equazioni di Navier-Stokes, che possono essere scritte in forma tensoriale ($i, j = 1, 2, 3$) tenendo conto della convenzione di sommatoria:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + X_i. \quad (1)$$

Dove, come abbiamo visto, nel volume accessibile σ , abbiamo $\rho = m/\sigma$ e $\nu = h/m$.

Per un *very slow motion* il termine centrale, non lineare, al primo membro diviene trascurabile, inoltre i gradienti di pressione, di solito risultano equilibrati dalle accelerazioni, ossia: $\partial p/\partial x_i = \rho X_i$, pertanto le (1) assumono la forma dell'equazione di Fourier:

$$\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial t},$$

le cui soluzioni notoriamente non si propagano ma si diffondono smorzandosi rapidamente. Anche un vortice in un fluido del genere decade secondo la relazione di Oseen-Hamel che deriva dalla precedente:

$$\Gamma = \Gamma_o (1 - e^{-\frac{x^2}{4\nu t}}), \quad (2)$$

ossia in un tempo t molto breve.

Pertanto in uno spazio del genere, cioè viscoso, non potrebbe esistere la materia così come la conosciamo.

Invece in un superfluido ad entropia $S = 0$, anche $\nu = 0$ per cui la (2) si riduce a $\Gamma = \Gamma_o$ e le (1) alle equazioni di Euler:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial t} = X_i. \quad (3)$$

Il volume accessibile σ si comporta come il nucleo del vortice di Rankine, che ruota come un corpo rigido, pertanto non vi può essere alcuna dissipazione di energia perché le forze viscosi non

possono manifestarsi per l'assenza di gradienti. Per questo volume valgono le (3) anche se in realtà contiene un fluido viscoso con $\mu \neq 0$.

Ora le equazioni di Euler, sempre in condizioni di equilibrio tra gradienti ed accelerazioni, si riducono a:

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

Nel termine non lineare al primo membro, il valore medio della velocità risulta in generale, per una direzione generica:

$$u = U + u',$$

dove u' rappresentano le fluttuazioni attorno al valor medio U :

$$\langle u(x, t) \rangle = U,$$

essendo $\langle u' \rangle = 0$ e pertanto, in questo modo, le (4) risultano linearizzate. Se ora consideriamo una direzione generica di propagazione x e per l'ipotesi di isotropia della turbolenza, $u = u_i$, otteniamo:

$$U \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

che ammette, in generale come soluzione delle funzioni arbitrarie:

$$u(x, t) = f(x - Ut),$$

cioè delle fluttuazioni che si propagano in direzione x alla velocità media U . In idrodinamica indica il trascinamento, da parte del moto medio della corrente, delle strutture vorticosi e corrisponde all'ipotesi di Taylor.

Inoltre se deriviamo le (4), sempre con $u = u_i$, prima rispetto a x_j :

$$U \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_j} = 0$$

e poi rispetto al tempo t :

$$U \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

dato che esistono tutte le condizioni per applicare il teorema di Schwarz sull'invertibilità dell'ordine di derivazione, dall'uguaglianza delle precedenti derivate miste otteniamo l'equazione di D'Alembert ($j=1,2,3$):

$$U^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (5)$$

Pertanto le perturbazioni, le fluttuazioni dovute alla turbolenza, si propagano nel fluido alla velocità media U in accordo con la (5), le cui soluzioni sono, com'è facile verificare, delle armoniche che hanno per argomento la fase: $(x - Ut) \equiv (\kappa x - \omega t)$, con κ numero d'onda ed ω la pulsazione, ossia:

$$u(x, t) = a e^{i(\kappa x - \omega t)}. \quad (6)$$

Anche delle combinazioni lineari della precedente, in pratica una serie di armoniche di Fourier soddisfa la (5):

$$u(x, t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{in(\kappa x - \omega t)}, \quad (7)$$

cioè delle fluttuazioni che si propagano alla velocità media U e che sono distribuite su di un ampio spettro di frequenze proprio come avviene nel moto turbolento².

Quindi ricapitolando lo spazio è in sostanza un superfluido eccetto che nelle singolarità dove esiste una particella di massa m che si trova in un piccolo volume accessibile σ con una viscosità cinematica $\nu = h/m$ e dinamica $\mu = h/\sigma$. Però σ ha un moto alla

²Si noti bene che in un superfluido del genere, ad entropia nulla, non occorre nessuna energia per generare le fluttuazioni turbolente (7) perché non ha una densità e non esistono forze viscosose da contrastare.

Rankine, cioè rigido, quindi il fluido si trova in condizioni idrostatiche, le forze viscosive non possono manifestarsi ed il volumetto può ruotare indefinitamente su se stesso insieme alla particella, che, come vedremo, si sposta senza incontrare nessuna resistenza, alla velocità media U ma, contemporaneamente sotto l'influenza di un'onda: in sostanza un ampio spettro di fluttuazioni casuali turbolente in accordo con le (7), che sono soluzioni dell'equazione (5) di D'Alembert.

§ 3. - La funzione d'onda.

Come in un fluido in moto turbolento risulta quindi naturale introdurre per lo spazio fisico i concetti di onda e di funzione d'onda. Le fluttuazioni di velocità, rispettivamente u per un osservatore esterno ed u' , per un sistema in moto hanno un significato esclusivamente cinematico, tuttavia se pensiamo al passaggio di una massa m avremo, in quel determinato punto una quantità di moto mu o mu' . Lo stesso discorso vale per le fluttuazioni al quadrato u^2 e u'^2 che prendono il significato di energia cinetica tramite la presenza di una massa m ed ovviamente del fattore $1/2$. Però potremmo anche, come nella turbolenza ordinaria, chiamare semplicemente energia le grandezze u^2 e u'^2 perché di fatto sono proporzionali ad essa.

Attenzione non bisogna pensare ad un'interazione, in qualche modo ad uno scambio di quantità di moto con il fluido stesso, infatti un superfluido, dal punto di vista dinamico, essendo di fatto isolato non può interagire con nulla. Quindi bisogna considerare il moto casuale delle piccole masse come un effetto delle deformazioni del continuum stesso che le particelle sono costrette a seguire ed a subire. Si possono quindi descrivere due scenari a seconda se vediamo il problema in modo puramente geometrico, più familiare per un fisico, oppure idrodinamico, certamente più congeniale ad un idraulico.

1) *La concezione geometrica.*

Lo spazio risulta deformato, distorto, non a causa delle enormi

masse come per la relatività generale, ma per delle particelle che con la loro quantità di moto introducono nel continuum, come in una scia, delle distorsioni estremamente mutevoli nel tempo. Le loro traiettorie sono pertanto estremamente complicate, dovendo seguire delle geodetiche dello spazio che sono di fatto indeterminate ed indeterminabili. Però dal punto di vista statistico possiamo senz'altro osservare delle zone con una maggiore o minore concentrazione di particelle.

2) *La concezione idrodinamica.*

Lo spazio viene agitato dalla turbolenza provocata, secondo la relazione di De Broglie, dalla quantità di moto delle particelle, turbolenza, con una scala principale pari a λ e costituita da degli aggregati, da dei vortici che, come in un aerosol, trasportano, in modo cinematico, le particelle provocando la loro maggiore o minor concentrazione in certe zone, infatti dove riscontriamo dei valori più grandi di u e u^2 vi sarà anche una maggiore concentrazione delle particelle e quindi una probabilità più elevata di osservarle.

Le due concezioni possono essere correlate se pensiamo alle coordinate geometriche x_i che risultano evidentemente legate alle fluttuazioni u_i tramite la relazione differenziale:

$$x_i(x_{oj}, t) = x_i(x_{oj}) + (x_{oj})u_i dt.$$

Con queste posizioni si potrebbero scrivere delle equazioni anche nella forma di Lagrange anziché di Euler:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = X_i,$$

ma questo non aggiungerebbe nulla salvo una maggiore complessità, infatti le traiettorie casuali, soluzioni delle precedenti sono date dalle 3 equazioni:

$$x_i = x_i(x_{oj}, t),$$

dove le x_{oj} indicano le coordinate iniziali, ossia al tempo t_o , di una generica particella, ovviamente per N di queste, dovremmo avere $3N$ equazioni dello stesso tipo con un notevole aumento delle complicazioni matematiche.

Ritornando allo schema di Euler, alla luce di quanto osservato in precedenza possiamo quindi pensare ad una funzione d'onda che per tradizione chiamiamo ψ che rappresenti, con il suo modulo, sia l'energia della turbolenza u^2 sia una densità di probabilità. Questa funzione potrebbe essere anche reale ma, dato che per comodità, è stata sempre considerata complessa, poniamo l'uguaglianza tra il suo modulo e l'energia della turbolenza:

$$\psi\psi^* = u^2$$

dove naturalmente ψ^* indica la complessa coniugata.

Ora in un qualche punto del dominio Σ , a causa del moto certamente turbolento vi sarà una fluttuazione u conseguente allo sviluppo di un vortice che racchiude in se una particella, pertanto siamo indotti a scrivere:

$$P = \int_{\Sigma} \psi\psi^* d\sigma = 1, \quad (8)$$

cioè con la probabilità P che, almeno in un punto, indica la certezza degli eventi collegati: *fluttuazione* \rightarrow *sviluppo di un vortice* \rightarrow *trasporto di una particella*.

La precedente costituisce pertanto la condizione di normalizzazione della funzione d'onda.

§ 4. - L'equazione d'onda.

Nel § 2 abbiamo visto come le fluttuazioni di velocità siano argomento dell'equazione di D'alembert. Se scriviamo quest'ultima in forma generale:

$$U^2 \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (9)$$

dove U indica la velocità di fase nella generica direzione del moto e Δ il laplaciano, possiamo ottenere facilmente l'equazione cercata. Le soluzioni della precedente si ottengono, com'è noto, attraverso il metodo della separazione delle variabili, dove la funzione incognita è data dal prodotto $\psi = \psi_o \cdot \psi_t$, con ψ_o e ψ_t dipendenti rispettivamente delle sole coordinate spaziali e del tempo. Con questo procedimento arriviamo infine un'onda del tipo:

$$\psi = \psi_o e^{i\omega t}, \quad (10)$$

che sostituita nella (9) fornisce la seguente espressione dove κ rappresenta il numero d'onda:

$$\Delta\psi_o + \kappa^2\psi_o = 0 \quad (11)$$

ricordando la relazione di De Broglie $\lambda = h/mU$ ed inoltre che l'energia cinetica $mU^2/2 = (E - V)$, abbiamo:

$$\Delta\psi_o + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi_o = 0, \quad (12)$$

cioè l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo valida solo per le onde monocromatiche, ossia per onde stazionarie con livelli energetici quantici: multipli interi del quantum $E = \hbar\omega$.

Per determinarla nel caso generale riscriviamo la (10) nella forma:

$$\psi = \psi_o e^{-i\frac{E}{\hbar}t},$$

deriviamo la precedente rispetto al tempo:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\frac{E}{\hbar}\psi,$$

inoltre la ψ deve sempre soddisfare un'equazione indipendente dal tempo del tipo (12):

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi = 0$$

eliminando l'energia E dalle ultime due otteniamo infine:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad (13)$$

cioè l'equazione temporale di Schrödinger valida in generale e quindi in grado di descrivere pienamente l'evoluzione della funzione d'onda³.

Ricordiamoci però che questa proviene dalla equazione di D'Alembert che a sua volta deriva da quella di Euler, cioè di un continuum, un fluido senza attriti, perfetto sia al di fuori delle singolarità, sia all'interno di queste per i movimenti rigidi alla Rankine che, come abbiamo visto, rendono inefficace la viscosità locale $\nu = \hbar/m$.

Si tratta quindi di un fluido molto diverso da quello prospettato da Landau per l'elio ${}^4\text{He}$, con una fase superfluida e l'altra normale, infatti per effetto di quest'ultima, i vortici decadono una volta cessata la rotazione del beker. Qui invece abbiamo sempre un superfluido, uno spazio in moto turbolento, con le perturbazioni, le fluttuazioni cinematiche $\psi \equiv u$ che si propagano come onde, secondo l'equazione di D'Alembert, alla velocità $U \leq c$, in sostanza una turbolenza che, sia pur di modesta entità,⁴ è in grado di distorcere lo spazio stesso costringendo le particelle a seguire delle complicate geodetiche, mutevoli nel tempo, provocando in definitiva la casualità del moto. Le geodetiche, come le traiettorie sono inaccessibili all'esperienza, ma possiamo eseguire delle statistiche e confrontarle con il modulo $\psi\psi^*$ cioè con la probabilità, per una particella, di trovarsi in quel dato punto. Tale modulo coincide con u^2 sia perché, in una concezione della turbolenza alla Prandtl, la vorticità trasporta le particelle nei punti con maggior energia, sia in una concezione geometrica, perché risulta logico pensare ad uno spazio distorto con una maggior concentrazione di traiettorie nelle zone dove u^2 è più elevato.

³Naturalmente in condizioni non relativistiche, altrimenti, com'è noto, occorrono le quattro funzioni ψ di Dirac.

⁴Infatti considerando $\Delta x \simeq \lambda$ risulta $u/U = 1/4\pi \sim 8\%$.

L'equazione d'onda (13) poteva anche essere dedotta conciliando la meccanica delle particelle con quella ondulatoria. Quest'ultima è basata sul principio di minima fase di Fermat secondo il quale un'onda segue il percorso con la minima fase φ in termini di calcolo delle variazioni:

$$\delta \int_A^B d\varphi = 0. \quad (14)$$

Una particella invece segue la traiettoria secondo il principio di minima azione:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} d\mathcal{A} = 0, \quad (15)$$

dove \mathcal{A} rappresenta appunto l'azione cioè il prodotto dell'energia E per il tempo, la costante di Planck h ne fornisce il minimo valore, pertanto viene anche chiamata: *quanto d'azione*. Un pacchetto d'onde ed una particella devono soddisfare le relazioni (14) e (15), quindi è logico supporre che in ogni istante l'azione debba essere proporzionale alla fase, pertanto possiamo scrivere:

$$\mathcal{A} = \hbar\varphi, \quad (16)$$

dove $\hbar = h/2\pi$, la costante di proporzionalità infatti non può che essere legata al quanto d'azione. Se adesso consideriamo un'onda ψ che si propaga in direzione x , con una fase $\varphi = \kappa x = \omega t$ ($\kappa = 2\pi/\lambda$) ed un'ampiezza a abbiamo:

$$\psi = ae^{i\varphi} \quad (17)$$

e per la (16):

$$\psi = ae^{i\frac{\mathcal{A}}{\hbar}}, \quad (18)$$

ma dato che $\mathcal{A} = Et$ otteniamo immediatamente:

$$E = \hbar\omega. \quad (19)$$

Se effettuiamo adesso la derivata parziale rispetto al tempo della (18) si ottiene:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \psi \quad (20)$$

e ricordando l'equazione di Hamilton-Jacobi:

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = -H,$$

possiamo ottenere formalmente dalla (20) l'equazione d'onda cercata:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H_{op} \psi, \quad (21)$$

formalmente perché H_{op} non rappresenta l'hamiltoniana classica, ma un operatore, detto hamiltoniano definito dalla seguente espressione:

$$H_{op} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V, \quad (22)$$

che ha le dimensioni di un'energia, V indica l'energia potenziale e Δ il laplaciano:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}.$$

Pertanto, tramite la (22), la (21) si trasforma di nuovo nell'equazione di Schrödinger.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

§ 5 - L'operatore hamiltoniano ed il caso limite.

Vediamo adesso di chiarire ulteriormente il significato dell'operatore hamiltoniano che può essere ricondotto dalla funzione

classica di Hamilton H , infatti per una direzione x_i ed una componente di velocità u_i la funzione H assume la forma:

$$H = \frac{mu_i^2}{2} + V. \quad (23)$$

Per la relazione fondamentale di De Broglie $\lambda = h/mu$ avremo, introducendo il numero d'onda $\kappa = 2\pi/\lambda$:

$$\kappa_i^2 = \frac{m^2 u_i^2}{\hbar^2}. \quad (24)$$

La relazione di De Broglie riguarda un'onda ψ che trasla in direzione x_i con numero d'onda κ_i :

$$\psi = ae^{i\kappa_i x_i}. \quad (25)$$

Derivando parzialmente la precedente due volte rispetto alla coordinata generica, abbiamo:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} = -\kappa_i^2 \psi \quad (26)$$

ed introducendo la (24) osserviamo che il seguente operatore risulta uguale all'energia cinetica:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{1}{2} m u_i^2. \quad (27)$$

Pertanto tenendo conto delle tre direzioni e dell'energia potenziale V possiamo scrivere:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} + V = m \frac{u_i u_i}{2} + V. \quad (28)$$

Quindi nel caso di validità della relazione di De Broglie la funzione hamiltoniana si trasforma nell'operatore (22): che risulta appunto l'operatore hamiltoniano dell'equazione di Schrödinger. Nel caso limite ipotetico in cui la viscosità dello spazio-fluido fosse trascurabile, ossia $\nu = h/m \rightarrow 0$, abbiamo che, sempre per la

relazione di De Broglie, anche $\lambda \rightarrow 0$, perciò non esisterebbe piú un limite inferiore alle lunghezza d'onda e quindi alle dimensioni degli atomi, essendo $\lambda = 2\pi r$. In questo tipo di spazio non potrebbe esistere la materia come la conosciamo.

Se invece la relazione di De Broglie non risulta piú valida, cioè $\lambda \rightarrow 0$ a causa di $m \rightarrow \infty$ si deve ricadere sempre nell'idrodinamica classica, infatti l'energia quantistica, espressa dal primo membro della (28), si annulla, ma deve esistere una funzione hamiltoniana che esprima l'energia meccanica del sistema macroscopico. Nel moto stazionario la seconda equazione di Hamilton assume la forma:

$$-\frac{\partial H}{\partial x_i} = 0,$$

per cui ritroviamo il teorema di Daniele Bernoulli:

$$H = \text{costante}.$$

In conclusione consideriamo di nuovo l'equazione d'onda di Schrödinger, derivata, come abbiamo visto, da quella di Euler, questa descrive l'evoluzione, nello spazio e nel tempo, di un'onda che rappresenta delle fluttuazioni turbolente dello spazio-fluido, uno spazio quindi che come il vento diviene qualcosa di imprevedibile, un $\pi\nu\epsilon\tilde{\nu}\mu\alpha$ che soffia dove vuole e come vuole indipendentemente da qualsiasi nostra volontà. Pertanto lo spazio fisico diviene il protagonista dei fenomeni quantistici e può senz'altro spiegarne, con chiarezza e semplicità, i diversi aspetti che adesso ci appaiono ancora oscuri.

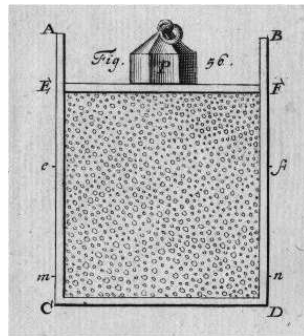


Figura 1: Il modello corpuscolare dell'aria di Daniele Bernoulli. Il coperchio ed il peso vengono sostenuti dagli urti delle particelle. Questa può essere considerata la prima idea della teoria cinetica.

Infatti a pag. 200 del trattato: Hydrodynamica di Daniele Bernoulli, nella sezione decima, possiamo leggere:

§ 2. Finge itaque vas cylindricum verticaliter positum ACDB atque in illo operculum mobile EF, cui pondus P super incubat : contineat cavitas ECDF corpuscula minima motu rapidissimo hinc inde agitata : sic corpuscula, dum impingunt in operculum EF idemque suis sustinent impetibus continue repetitis fluidum componunt elasticum quod remoto aut diminuito pondere P sese expandit.

Capitolo III

Lo spazio fluido.

§ 1. - Solo lo spazio.

Nel primo capitolo abbiamo visto come il *collasso* dell'onda non sia realistico alla luce dell'obiezione di Renninger con i risultati negativi sul primo rivelatore, mentre l'onda collassa sul secondo.¹ Ma al di là della fisica si vuole sottolineare, con tutta la pacatezza e la delicatezza che il caso richiede, che un'ipotesi del genere risulta assurda alla luce dei concetti fondamentali del calcolo delle probabilità.

Se un sistema può assumere due soli stati, reali, macroscopici, come per esempio una scatola che contenga una pallina bianca o nera, oppure, dato che amiamo i gatti e non li uccidiamo, una scatola con dentro un gatto che possa essere sveglio o addormentato, tramite un meccanismo chimico innocuo che abbia le stesse possibilità di funzionare o meno, od altri casi simili, tutti con la stessa probabilità *a priori*:

$$p = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{1}{2}.$$

Esiste inoltre la probabilità *a posteriori* f detta anche frequenza statistica, cioè quella che viene di fatto rilevata sperimentalmente attraverso una estrazione effettuata sull'intera popolazione. La legge di grandi numeri afferma che, al crescere del numero delle estrazioni, la f si avvicina al valore teorico p .

Ora tutte le assurdità derivano dal fatto che si vuole applicare una distribuzione di probabilità ad un unico singolo caso. Si ragiona erroneamente così: ho una sola scatola con una sola pallina

¹In modo molto ostinato si potrebbe ribattere che i due rivelatori costituiscono in realtà un unico apparato e l'onda decide da sola dove collassare, ma si tratta evidentemente di un'obiezione molto debole.

all'interno, la apro, risultato: bianca, quindi ho la certezza, la p è collassata ad 1, ovviamente l'evento contrario: pallina nera, collassa a $1 - p = 0$.

Altrettanto assurdo è l'esempio del gatto di Schrödinger: apro l'unica scatola, lo trovo addormentato, bene la p è collassata ad 1, mentre quella del gatto sveglio a 0. Si badi bene qui non c'è nessun fenomeno quantistico, il meccanismo chimico è un comune congegno macroscopico che ha le stesse possibilità di funzionare o meno.

Si giunge anche alla assurdità *magna* di dire che, prima di aprire la scatola i due stati sono sovrapposti ed il gatto risulta, allo stesso tempo sveglio ed addormentato.

Tutto l'errore nasce dall'aver considerato un singolo esempio, una singola estrazione. Occorrono invece 2 miliardi di scatole, allora constateremo semplicemente che all'incirca in un miliardo il gatto è sveglio, e nell'altro miliardo è addormentato.

Il calcolo delle probabilità va applicato a popolazioni enormi, non ad un singolo misero evento!

Nel caso di situazioni reali: per esempio si misura con grande precisione una certa distanza terrestre, se si ripete la misura per moltissime volte si ottengono dei valori dispersi attorno alla media con una distribuzione gaussiana avente uno scarto quadratico medio dipendente dall'apparato di misura. Ora se ci fermiamo alla prima volta soltanto e si ottiene un unico valore della distanza, che cosa si può dire, che la gaussiana è collassata?

Quindi una misura non rappresenta altro che un'estrazione da una popolazione casuale e questo vale sempre anche per i sistemi quantistici. Per esempio se abbiamo un elettrone che può aver uno spin $+1/2$ o $-1/2$, se ci fermiamo ad un'unica misura ricadiamo nei guai precedenti, con la sovrapposizione degli stati prima (lo spin è contemporaneamente *su* e *giu*) ed il collasso dopo aver effettuato la misura. Ma se questa viene ripetuta un numero grande di volte N , allora constateremo semplicemente che il sistema si trova per $N/2$ volte nel primo stato e per $N/2$ nel secondo.

D'altra parte alcuni tentativi dello stesso De Broglie di intro-

durre una *termodinamica nascosta* di un certo *mezzo subquantico* sono rimasti infruttuosi.

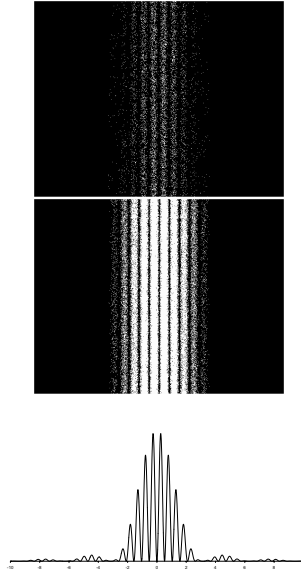


Figura 1: Le particelle si accumulano, una ad una, in modo da formare una tipica figura di interferenza da due fenditure che segue la funzione ψ^2 .

Anche David Bohm ha ipotizzato un *potenziale quantico nascosto* che produrrebbe delle forze in modo che l'onda sia in grado di guidare le particelle. Alcuni suoi allievi hanno in seguito calcolato questo potenziale nel caso di due fenditure unitamente alle traiettorie delle particelle guidate. Ebbene il potenziale appare piatto all'interno di ogni frangia, cosí che le traiettorie si distribuiscono in modo uniforme in ciascuna di esse. Ora questo appare contrario all'esperienza perché le particelle in questo caso si accumulano in modo casuale con il massimo della probabilità proprio al centro di ciascuna frangia, come si può facilmente osservare dalla figu-

ra (Fig. 1). Infatti se l'intensità delle sorgente risulta elevata e difficile osservarlo, ma a basse intensità, con relativamente poche particelle, la differenza certamente si nota. Le particelle infatti cadono in maggior numero nel centro di ogni frangia di interferenza piuttosto che ai lati. D'altra parte in un esperimento da due fenditure le particelle seguono, com'è noto, una distribuzione multimodale data dalle due onde che interferiscono e per ogni frangia non risulta certamente uniforme come si osserva in figura (Fig. 1).

A questo punto non rimane che lo spazio, lo spazio fisico che non si nota ma non è affatto nascosto, risulta presente intorno a noi e se viene preso in considerazione, con ordine e metodo, si possono dare delle risposte sensate, chiare e semplici alle domande fondamentali formulate nel primo capitolo.

§ 2. - La quantizzazione del momento angolare.

Perché il momento angolare è quantizzato? Per rispondere a questa prima domanda consideriamo lo spazio fisico che si comporta come un fluido perfetto, ma nelle singolarità, dove si trova una massa m , presenta un viscosità cinematica $\nu = h/m$. Ragionando quindi in modo idrodinamico consideriamo lo sviluppo di un vortice, cioè di una zona delimitata da una circonferenza C dove il fluido si muove alla velocità tangenziale u . Il numero di Reynolds rappresenta il rapporto tra le forze d'inerzia Cu che sostengono il moto e quelle viscosive ν che invece lo contrastano. Pertanto per avere un vortice in una zona di fluido dotata di viscosità occorre che sia rispettata la condizione che esprime appunto il valore del numero di Reynolds necessario affinché avvenga lo sviluppo:

$$\frac{Cu}{\nu} \geq 1,$$

lo strato critico corrisponde all'uguaglianza:

$$\frac{Cu}{\nu} = 1. \tag{1}$$

Tenendo conto inoltre della definizione di circuitazione:

$$\Gamma = 2\pi ur,$$

la (1) può essere scritta come:

$$\Gamma = \frac{h}{m}, \quad (2)$$

che rappresenta il *quantum* di circuitazione, ossia il minimo valore per ottenere lo sviluppo di un vortice. Per 2 vortici occorre 2Γ e così via, per n vortici avremo quindi:

$$\Gamma = \frac{h}{m}n. \quad (3)$$

Pertanto, stante la natura individuale dei vortici, la circuitazione deve essere quantizzata perché n deve essere necessariamente intero ossia quantico. Ricorrendo ora alla definizione di Γ , dalla (3) possiamo scrivere in definitiva con $\hbar = h/2\pi$:

$$mur = \hbar n, \quad (4)$$

che rappresenta proprio la quantizzazione del momento angolare postulata da Bohr per l'atomo di idrogeno.

Notiamo infine come, in questo modo l'introduzione dei numeri quantici sia spontanea e segua con semplicità la natura delle cose.

§ 3. - Gli stati stazionari.

Perché l'elettrone non cade mai sul nucleo? Si dimostra, per l'atomo di idrogeno, che se si comportasse secondo le leggi dell'elettromagnetismo classico, cioè come un oscillatore herziano, irraggiando energia elettromagnetica, l'elettrone cadrebbe sul nucleo in un tempo di 10^{-11} s. Niels Borh ha quindi postulato che per ogni valore del momento angolare quantizzato, espresso dalla relazione (4), corrispondesse uno stato stazionario, ossia uno stato senza emissione alcuna di energia elettromagnetica, introducendo pertanto una **eccezione** alle leggi dell'elettromagnetismo.

Le cose non andrebbero diversamente se considerassimo l'atomo di idrogeno come un vortice, dove l'elettrone di massa m ruota ad una distanza di $r_o = 0.53 \text{ \AA}$ dal nucleo. Infatti per un fluido con viscosità $\nu = h/m$ si avrebbe, secondo la relazione già vista di Oseen-Hamel, una semivita dell'ordine di 10^{-18}s . Questo però per una distribuzione di velocità identica a quella del vortice potenziale:

$$u = \frac{\Gamma}{2\pi r},$$

ma se invece abbiamo un comportamento come il vortice di Rankine, ossia con un nucleo di raggio r_o dove per $r \leq r_o$:

$$u = \omega r \tag{5}$$

cioè come un corpo rigido, quindi in condizioni idrostatiche, le forze viscosive risultano pertanto nulle, senza nessuna resistenza al moto. D'altra parte se consideriamo il primo stato stazionario espresso dalla (4) con $n = 1$, per avere l'espressione dell'energia occorre moltiplicare ambo i membri della (4) per la frequenza ω :

$$mur\omega = \hbar\omega.$$

Ora per ottenere anche al primo membro un'espressione proporzionale all'energia cinetica, cioè mu^2 , occorre introdurre nella precedente proprio la relazione (5).

Quindi gli stati stazionari non sono altro che dei vortici con i rispettivi nuclei in moto come corpi rigidi, i raggi sono proporzionali a n^2 e sulla circonferenza si dispiega l'onda di De Broglie con $n\lambda = 2\pi r$, per i punti all'interno del nucleo vorticoso la viscosità non si manifesta, all'esterno lo spazio-fluido, ad entropia nulla, è perfetto, quindi niente si oppone al moto.

Tutto questo non sembrerebbe, a prima vista, portare una maggior comprensione, una luce su ciò che aveva, a suo tempo ipotizzato Bohr. Però poniamo l'attenzione sulla parte rigida del vortice, l'elettrone alla periferia ed il protone vicino al centro sono

trascinati in un moto che appare tale solo per un osservatore esterno, essi sono in realtà in condizioni idrostatiche come abbiamo visto, ma la cosa piú interessante, anzi fondamentale è che sono al tempo stesso **in condizioni elettrostatiche**, per cui non possono emettere energia semplicemente perché sono due cariche ferme rispetto allo spazio circostante, un semplice dipolo.

Ciò non impedisce, per un osservatore esterno, secondo le leggi classiche dell'elettromagnetismo, lo sviluppo di un campo magnetico stazionario, il cosiddetto *magnetone di Bohr*.

Quindi non c'è piú bisogno di porre eccezioni alle leggi dell'elettromagnetismo classico, le due cariche, come su di un disco, su una giostra, si guardano faccia a faccia senza nessun movimento relativo. Un disco del genere ha un asse che può essere comunque orientato e quindi si comprendono immediatamente gli orbitali sferici di tipo s dati dalla soluzione dell'equazione di Schrödinger.² Per le altre forme l'interpretazione appare piú complicata, il che tuttavia non toglie nulla alla naturalezza con cui, nell'ipotesi dello spazio-fluido, la risposta a questa domanda divenga al tempo stesso cosí chiara e cosí semplice.

§ 4. - Il principio di indeterminazione.

Qual'è il significato delle relazioni di indeterminazione?

Abbiamo già accennato a questo argomento nei capitoli precedenti, vediamo adesso di puntualizzarlo ulteriormente.

In un continuo come lo spazio che si comporta come un fluido, avente localmente la viscosità $\nu = h/m$, le ben note relazioni di indeterminazione ($i = 1, 2, 3$):

$$\Delta x_i \Delta u_i \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (6)$$

possono essere scritte nella seguente forma:

²Con una viscosità dinamica, come abbiamo visto, identica a quella dell'acqua, una coincidenza molto interessante che ha permesso di applicare con successo al distacco dei vortici in questo fluido ordinario, un analogo modello quantistico con la costante macroscopica $k = 406\nu$.

$$\frac{\Delta x_i \Delta u_i}{\nu} \geq \frac{1}{4\pi}. \quad (7)$$

Esse esprimono proprio il numero di Reynolds relativo alla generica cella dello spazio delle fasi che deve essere superiore ad un certo valore critico ($1/4\pi$) esprimendo quindi la condizione di esistenza del moto turbolento. Infatti se la (7) non viene rispettata all'interno della generica cella si verificano le condizioni per il moto laminare.

Le Δu quindi vanno interpretate come fluttuazioni dovute alla turbolenza dello spazio-fluido e Δx come una fessura, un'apertura. Ora, per la (7) se questa è grande le fluttuazioni saranno deboli, viceversa, per rispettare il valore del numero di Reynolds, avremo grandi fluttuazioni con delle aperture strette. Tutto ciò risulta anche legato all'indeterminazione di una particella trascinata dal flusso turbolento. Infatti con una fessura larga la sua posizione sarà indeterminata perché potrà passare un qualsiasi punto di Δx , mentre per le trascurabili fluttuazioni, la sua quantità di moto sarà molto più certa. Al contrario, per una fessura stretta, la posizione risulterà affetta da una piccola incertezza, ma la quantità di moto, a causa delle grandi fluttuazioni di velocità, sarà del tutto indeterminata (Fig. 2).

Inoltre ponendo nella (7) $r_i = 2\Delta x$ e $u_i = \Delta u_i$, possiamo scrivere:

$$2\pi r_i u_i \geq \nu$$

ossia:

$$\Gamma_i \geq \nu,$$

cioè il minimo valore della circuitazione, in una generica direzione, per avere lo sviluppo di un vortice. Pertanto la (6) e la (7) sono legate anche alla vorticità ed alla turbolenza, ma soprattutto all'esistenza della materia, infatti la precedente può essere anche scritta:

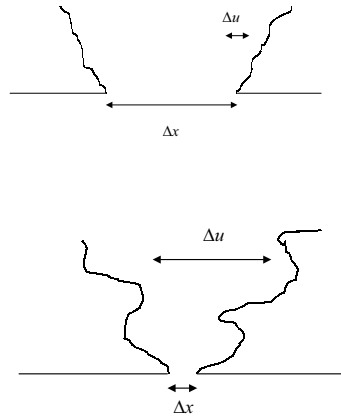


Figura 2: A valle di una fessura larga le fluttuazioni di velocità sono molto inferiori rispetto ad una apertura più stretta.

$$m u_i r_i \geq \hbar,$$

che, con l'uguaglianza, rappresenta il minimo valore del momento angolare dell'atomo di idrogeno.

Quindi, in conclusione, possiamo rispondere a questa domanda dicendo che le relazioni di indeterminazione di Heisenberg, interpretate come un numero di Reynolds, affermano in sostanza **la necessità, nello spazio stesso, dell'esistenza del moto turbolento**. Le dimensioni delle celle nello spazio delle fasi sono infatti correlate con le fluttuazioni dovute alla turbolenza. Inoltre se lo spazio fosse in un regime di tipo laminare, regolare, senza vortici, la precedente disuguaglianza, legata alle (6) e (7), non sarebbe soddisfatta e di conseguenza non potrebbe esistere l'atomo di idrogeno in particolare e la materia in generale.

§ 5. - Il significato della funzione d'onda.

Qual'è la natura dell'onda di De Broglie? Per rispondere a questa domanda occorre considerare lo spazio fisico che si deforma, si incurva in modo casuale a causa di una particella con una quantità di moto: $m\vec{u}$. Ora, come abbiamo già notato, descrivere queste deformazioni risulta molto più complicato che ragionare in modo idrodinamico e considerare delle fluttuazioni di velocità dovute alla turbolenza. In sostanza la particella, muovendosi nello spazio-fluido, si comporta in modo molto simile ad un natante ordinario che lascia dietro di se una scia. In questo caso però la celerità delle onde sulla superficie dell'acqua è molto bassa, di solito inferiore alla velocità del natante stesso, pertanto, in condizioni supercritiche, notiamo la classica forma a V della scia con i fronti d'onda laterali obliqui, analoghi ai fronti di shock supersonici.

Invece per una particella il treno delle onde, che rappresentano l'andamento della turbolenza, che quindi risulta distribuita con i massimi distanziati di λ , si muove di conserva con la particella stessa e con i fronti d'onda normali alla direzione. La celerità massima qui risulta pari a quella della luce c e per applicare l'equazione di Schrödinger in luogo della teoria di Dirac occorre essere in condizioni non relativistiche, con $u \ll c$. Se l'onda è piana e trasla nella direzione x_1 la posizione della particella risulta indeterminata in questa dimensione, ma anche su tutti i fronti d'onda piani, quindi può essere rivelata in un qualsiasi punto dello spazio. Anche nel caso semplice di una sola dimensione un'onda che trasla lungo x non ci dice nulla sulla posizione della particella che può essere in qualsiasi punto perché i massimi della turbolenza, nel traslare, spazzano tutto lo spazio x . Tutto il contrario accade per un'onda stazionaria, con i ventri ed i nodi ben determinati, pertanto con il modulo della funzione d'onda che, come abbiamo visto, viene definito come:

$$\psi\psi^* = |\psi|^2 = u^2$$

che presenta dei massimi nei ventri e si annulla nei nodi. Dove l'e-

nergia della turbolenza nello spazio-fluido ha un massimo significa che in quel punto sono presenti un maggior numero di strutture, di aggregati di fluido, ossia di vortici, come in un getto ed allo stesso tempo, in modo analogo ad un aerosol, le particelle vengono trascinate, in pratica *guidate* verso quei massimi perché in sostanza catturate e trasportate dalle strutture stesse della turbolenza. Pertanto la densità di probabilità di osservare una particella in quella determinata posizione x assume lo stesso andamento dell'energia cinetica della turbolenza.

Infatti l'equazione di Schrödinger per stati stazionari in una sola dimensione assume la forma:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \kappa^2\psi = 0 \quad (8)$$

κ esprime il numero d'onda, pertanto abbiamo:

$$\kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)$$

e, per $V \rightarrow \infty$; $x \leq 0$; $x \geq L$, cioè in una buca di potenziale molto profonda, le condizioni al contorno divengono:

$$\psi = 0 : \begin{cases} x = 0 \\ x = L. \end{cases}$$

L'integrale generale della (8) è, com'è noto:

$$\psi = ae^{i\kappa x}$$

che, per la formula di Euler, può essere anche scritto:

$$\psi = a \sin \kappa x$$

che già soddisfa in se alla prima condizione al contorno. Dalla seconda abbiamo:

$$\kappa L = n\pi \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

ossia: $\lambda = 2L/n$, dalla quale otteniamo gli integrali particolari o autofunzioni della (8):

$$\psi_n = a \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

L'ampiezza a si ricava dalla condizione di normalizzazione, che fornisce: $a^2 = 2/L$, per cui la densità di probabilità $|\psi|^2 = u^2$ diviene allora:

$$|\psi|^2 = \frac{2}{L} \sin^2 \frac{\pi n}{L} x,$$

che presenta un numero di massimi pari ad n (Fig. 3). I corrispondenti autovalori, cioè i livelli energetici accessibili alla particella saranno allora:

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} n^2.$$

In questo caso la turbolenza non poteva penetrare nelle due barriere laterali a potenziale infinito, se invece questo presenta un valore finito allora la (8), con $\kappa^2 < 0$ ammette solo una soluzione reale e quindi esponenziale anziché immaginaria come in precedenza. La funzione $\psi^2 = u^2$ allora penetra nelle barriere e quindi la turbolenza dello spazio può condurre la particella anche in queste zone inaccessibili secondo la meccanica classica, fino ad avere una probabilità non nulla di superare addirittura un'intera barriera di potenziale nel ben noto *effetto tunnel*.

Osserviamo anche come le autofunzioni di Fig. 3 somiglino molto ai profili di velocità di n getti turbolenti affiancati, infatti, per $n = 1$ vediamo come la distribuzione di Gauss, tipica dei getti sia molto vicina al quadrato di una funzione armonica (Fig. 3).

Per quanto riguarda infine la figura d'interferenza ottenuta a valle di due fenditure bisogna considerare un'onda di lunghezza λ che trasla in direzione x alla stessa velocità media U della particella. L'ampiezza di tale onda è collegata alla turbolenza che

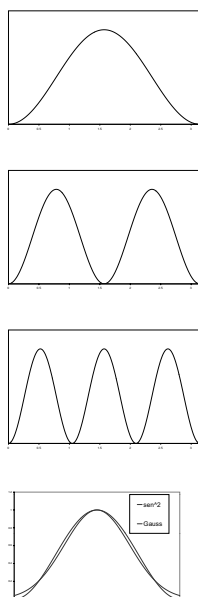


Figura 3: Le funzioni $\psi^2 = u^2$ per $n = 1, 2, 3$ in una buca di potenziale con ai lati $V \rightarrow \infty$. La precedente funzione d'onda ($n = 1$) si avvicina molto alla distribuzione di Gauss, tipica della turbolenza. Le altre due possono essere considerate come delle distribuzioni multimodali.

si forma nello spazio con fluttuazioni pari ad u ed energia cinetica proporzionale a u^2 . Queste fluttuazioni, come abbiamo visto, dovute ai vortici sono in grado di guidare ciascuna particella, indipendentemente dalle altre, verso le zone a maggior energia che pertanto risultano anche a maggior probabilità. Infatti dove esiste una maggiore concentrazione di vortici abbiamo una maggior energia cinetica ma, allo stesso tempo un numero di particelle più elevato perché queste, catturate dai vortici stessi, vengono trasportate, *guidate* nelle regioni di spazio ad alta turbolenza, cioè

con $\psi^2 = u^2$. Ora quando un'onda trasla i massimi percorrono tutto lo spazio e quindi in sostanza la probabilità risulta uniforme in accordo con il principio di indeterminazione. Invece al passaggio di due fenditure l'onda interferisce con se stessa formando nel senso trasversale y un'onda stazionaria con ventri e nodi in posizione fissa, distanti Δy , secondo la relazione di Young:

$$\Delta y = \lambda \frac{s}{a}, \quad (9)$$

dove s indica la distanza dello schermo dalle due fenditure con un interasse a tra di loro. Ora se queste fossero molto strette in larghezza da poter essere considerate come delle sorgenti puntiformi avremmo, per la ψ^2 , tutti i massimi della stessa intensità (Fig. 4). Il tutto è assimilabile a dei getti affiancati che si allargano a ventaglio in accordo con la (9). Le particelle vengono guidate dalla turbolenza all'interno dei getti secondo delle traiettorie indeterminabili.

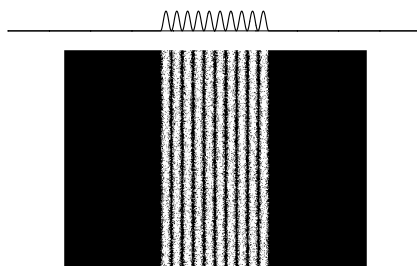


Figura 4: A valle di due fessure molto strette la funzione ψ^2 presenta un'ampiezza uniforme, come altrettanti getti turbolenti identici ed affiancati.

Invece nella pratica sperimentale ciò è di solito molto difficile da ottenere, per esempio nelle esperienze di Claus Jönsson³ sulla diffrazione di elettroni da fessure multiple, queste erano larghe

³Claus Jönsson: Electron Diffraction at Multiple Slits, January 1974 American Journal of Physics **42** pp. 4-11.

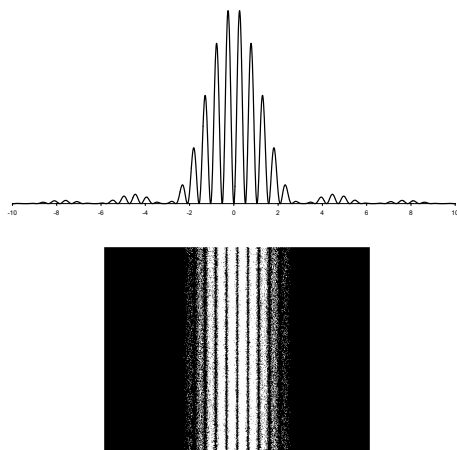


Figura 5: La funzione $\psi^2 = u^2$ per due fessure larghe viene invece modulata dalla relazione di diffrazione.

$0.3\mu m$ e poste alla distanza di $1\mu m$, ma gli elettroni nel microscopio elettronico avevano un'energia pari a $50KeV$ con una $\lambda = 0.05 \text{ \AA}$, quindi molto inferiore alla larghezza di ciascuna fessura. In queste condizioni di fessura larga la figura di interferenza viene, comè noto, modulata dalla funzione di diffrazione sinc^2 , che per il principio di Fresnel, esprime l'interferenza di innumerevoli sorgenti situate sui piani delle fessure stesse (Fig. 5).

In conclusione la turbolenza dello spazio spiega in modo naturale i fenomeni ondulatori della teoria dei quanti. A prima vista tutto ciò sembrerebbe in accordo con l'interpretazione di Paris, ma anche quella di Copenaghen può essere considerata a patto di non pensare al collasso o riduzione dell'onda, semplicemente l'onda, la scia turbolenta, una volta arrivata al sistema di misura, si dissolve ($\lambda \rightarrow \infty$) perché la particella si arresta, non si può quindi parlare di collasso ma di *dissolvimento* dell'onda.

§ 6. - L'oscillatore armonico lineare.

Per quanto riguarda i problemi di barriera il caso piú interessante risulta l'oscillatore lineare quantizzato. Infatti l'equazione di Schrödinger assume sempre la solita forma:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi = 0, \quad (10)$$

dove adesso l'energia potenziale V di una particella di massa m , che oscilla in direzione x con un'ampiezza a , risulta:

$$V = \frac{1}{2}m\omega^2x^2.$$

Si tratta di un problema di Sturm-Liouville e, per risolverlo, è utile introdurre, in luogo della x una variabile adimensionale ξ cosí definita:

$$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x,$$

perciò la (10) si trasforma nella seguente equazione:

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - \xi^2\right)\psi = 0, \quad (11)$$

dove, se siamo nelle condizioni di poter trascurare il primo termine tra parentesi in confronto con ξ^2 , allora l'equazione $\psi'' = \xi^2\psi$ ammette come soluzione asintotica limitata:

$$\psi = \chi e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

dove anche χ è una funzione di ξ , pertanto si ottiene:

$$\chi'' - 2\xi\chi' + \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - 1\right)\chi = 0, \quad (12)$$

che si trasforma nell'equazione di Hermite se poniamo il termine tra parentesi pari a $2n$.

$$\left(\frac{2E}{\hbar\omega} - 1\right) = 2n \quad (13)$$

$$\chi'' - 2\xi\chi' + 2n\chi = 0. \quad (14)$$

L'equazione di Hermite (14) ammette una soluzione finita solo per valori interi di n incluso lo 0, per cui dalla (13) ricaviamo gli autovalori del problema di Sturm-Liouville cioè i livelli energetici dell'oscillatore armonico:

$$E_n = \left(\frac{1}{2} + n\right) \hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, 3 \dots) \quad (15)$$

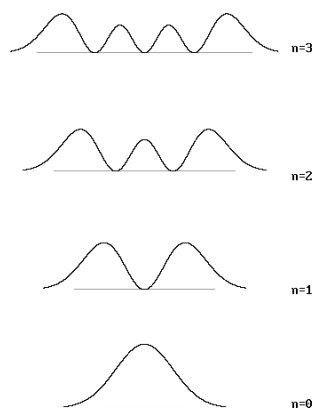


Figura 6: Le prime quattro autofunzioni d'onda ψ^2 ($n = 0, 1, 2, 3$) per un oscillatore armonico. La prima ($n = 0$) è identica alla distribuzione di Gauss. La linea grigia indica la zona accessibile alla particella in un oscillatore classico. La turbolenza invece la conduce oltre tale limite.

Le autofunzioni sono proporzionali ai polinomi di Hermite $H_n(\xi)$, le soluzioni dell'equazione (14) assumono quindi la forma:

$$\xi_n = A_n H_n(\xi), \quad (16)$$

dove i polinomi sono notoriamente dati dalla formula di Rodrigues, che fornisce: $H_0 = 1$; $H_1 = 2\xi$; $H_2 = 4\xi^2 - 2$; $H_3 = 8\xi^3 - 12\xi$...

Le costanti A_n vengono determinate dalla condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2 d\xi = 1$$

giungendo infine all'espressione delle autofunzioni, la prima delle quali, per $n = 0$, assume la forma:

$$\psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}.$$

Quindi la probabilità che la particella oscillante di massa m si trovi in una data posizione x è data dalla funzione ψ_0^2 identica alla u^2 , cioè all'energia della turbolenza che, come abbiamo visto, con le sue fluttuazioni casuali guida la particella anche oltre l'ampiezza classica a (Fig. 6).

$$\psi_0^2 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}, \quad (17)$$

che, introducendo la varianza s^2 , pari a:

$$s^2 = \frac{\hbar}{2m\omega},$$

la (17) si trasforma nella variabile casuale di Gauss:

$$p(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2s^2}},$$

tipica della turbolenza, infatti le velocità in una corrente turbolenta, come pure nei getti, seguono tutte la precedente distribuzione.

Pertanto le altre funzioni in figura per $n > 0$ possono essere interpretate sia come variabili casuali multimodali, sia come energia in getti turbolenti affiancati in numero pari a $n + 1$ per ciascun

livello. La turbolenza produce delle fluttuazioni indeterminate ed indeterminabili tali da condurre la particella oscillante con altrettante traiettorie sconosciute, nelle posizioni x dove l'energia risulta maggiore, sempre alla stregua di un aerosol. La stessa turbolenza dello spazio inoltre ha la capacità di condurla oltre la zona grigia in figura (Fig. 6), inaccessibile per un oscillatore classico.

Risulta peraltro interessante il caso di un oscillatore posto in contatto con una sorgente termica di energia kT , la probabilità che assuma uno dei livelli energetici dati dalla (15) risulta massima per lo stato fondamentale e decresce molto rapidamente per gli altri livelli superiori. Com'è noto la media ponderata dalla probabilità ne fornisce il valor medio:

$$\langle E \rangle = \frac{hf}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1} + \frac{hf}{2}, \quad (18)$$

che può anche essere espresso in forma adimensionale come in figura (Fig. 7). Notiamo che per $hf \rightarrow 0$ nella (18) abbiamo $\langle E \rangle = kT$, quindi l'oscillatore classico viene espresso da una linea retta, mentre quello quantizzato devia da questa semplice legge per le temperature basse, ossia per $T < hf/k$ dove k qui esprime la costante di Boltzmann, in sostanza questo avviene al di sotto dello stato critico, quando $kT/hf \leq 1$.

La (18) viene usata in fisica, com'è noto, in modo indiretto per calcolare il calore specifico nei corpi solidi e soprattutto per lo studio della radiazione del corpo nero, ma non è possibile confrontarla direttamente con i dati sperimentali.

Nel capitolo I invece abbiamo verificato sperimentalmente che i vortici in condizioni subcritiche, cioè per $R < 50$ e $T/kf < 1$, distaccati da un filo oscillante, seguono proprio il modello dell'oscillatore quantizzato con la costante macroscopica pari a $k = 406\nu$.

L'acqua si è quindi rivelata un ottimo mezzo sperimentale per la sue coincidenze con lo spazio fluido, infatti avevamo già notato che per un elettrone con uno spazio accessibile σ pari all'orbitale $1s$ dell'atomo di idrogeno, ossia un sfera di raggio 0.53 \AA , la viscosità

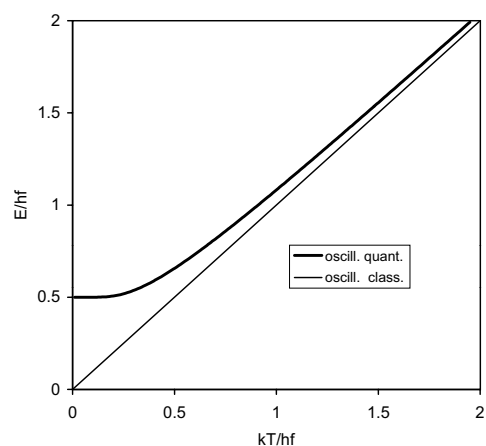


Figura 7: L'energia media dell'oscillatore quantizzato in contatto con una sorgente termica alla temperatura T , a confronto con l'analogia di un oscillatore classico.

dinamica $\mu = h/\sigma$ fosse pari a quella dell'acqua a 18°C ($1.06 \cdot 10^{-3} [(N/m^2) \cdot s \equiv (J \cdot s)/m^3]$). Ora occorre sottolineare, sempre per l'elettrone, che quella cinematica $\nu = h/m$ ($7 \cdot 10^{-4} m^2/s$) ha lo stesso ordine di grandezza della costante di quantizzazione macroscopica $k = 406\nu$ ($4 \cdot 10^{-4} m^2/s$), per l'acqua a temperatura ambiente.

§ 7. - L'Idrodinamica per mezzo delle immagini speculari.

Prima di rispondere all'ultima fondamentale domanda e bene precisare le relazioni esistenti ed i teoremi relativi ai filamenti vorticosi o linee di vorticità presenti nell'idrodinamica del fluido perfetto. Infatti le note equazioni di Euler per il fluido perfetto:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = X_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (19)$$

possono essere scritte in modo da porre in evidenza la vorticità per mezzo delle componenti del rotore: $\Omega_k = 2\omega_k$. Per questo occorre aggiungere e togliere, al primo membro della precedente, la grandezza:

$$u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i},$$

raggruppando i termini si ottiene alla fine:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u_j u_j}{2} \right) - u_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right).$$

Ora nel primo, per la convenzione di sommatoria, possiamo scrivere $u_j u_j = U^2$, cioè il quadrato della velocità risultante, mentre la parte tra parentesi del secondo rappresenta, proprio per definizione, le componenti del rotore $2\omega_k$. Inoltre se le forze X_i dipendono da un potenziale V , possiamo scrivere le (19) nella seguente forma:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{p}{\rho} + V + \frac{U^2}{2} \right\} = 2u_j \omega_k - \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad (20)$$

ossia l'equazione di Euler dove vengono espressi in forma esplicita i termini che indicano la vorticità presente nel fluido.

In sostanza una linea vorticoso o filamento nel fluido, di fatto una singolarità, deve soddisfare la (20), al di fuori di essa il moto risulta irrotazionale, pertanto, nel caso di indipendenza dal tempo, abbiamo:

$$\left\{ \frac{p}{\rho} + V + \frac{U^2}{2} \right\} = \text{costante}, \quad (21)$$

ossia l'integrale di Euler, valido per tutti i punti del campo di moto.

Se invece riscriviamo la (20), sempre in moto stazionario, moltiplicando ambo i membri per dx_i , il secondo esprime un prodotto vettoriale proiettato nella direzione del moto, mentre al primo abbiamo un differenziale totale, pertanto:

$$d \left\{ \frac{p}{\rho} + V + \frac{U^2}{2} \right\} = 2u_j \omega_k dx_i. \quad (22)$$

Quindi per vettori velocità paralleli a quelli vorticali, il loro prodotto vettoriale risulta nullo e quindi ritroviamo la (21), valida lungo la linea vorticoso che coincide con la traiettoria in questo tipo di moto definito elicoidale o del Beltrami e la (21) assume il nome di integrale del Beltrami. Esiste poi un terzo caso in cui le componenti del rotore $2\omega_k$ sono tutte ortogonali a quelle del vettore velocità u_j , quindi il prodotto vettore sarà anch'esso normale e la sua proiezione nella direzione del moto risulterà pertanto nulla. La costante del trinomio varia, in questo caso, da una linea di flusso all'altra o, per la permanenza del moto, da una traiettoria all'altra e la (21) assume il nome di integrale o teorema del Bernoulli.

Altri relazioni importanti in idrodinamica sono i teoremi di Stokes, di Thomson⁴ e tre teoremi di Helmholtz sui vortici oltre alle relazioni di Biot e Savart per le velocità indotte dalle linee vorticoso stesse.

Il teorema di Stokes pone una correlazione tra la circuitazione Γ su di una generica linea chiusa L definita come:

$$\Gamma = \oint u_i dx_i$$

⁴Alias Lord Kelvin.

ed il flusso del vettore $\text{rot } \vec{u}$ su di una superficie generica Σ che abbia però come frontiera la stessa L . il teorema dimostra l'uguaglianza tra la circuitazione ed il flusso del rotore che ha come componenti Ω_k :

$$\Gamma = \oint u_i dx_i = \int \int_{\Sigma} \Omega_k dx_i dx_j. \quad (23)$$

Il teorema di Thomson afferma che in un fluido perfetto la circuitazione non può variare nel tempo, ossia:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0, \quad (24)$$

quindi, una volta generato, un vortice ha una durata indefinita.

Il teorema di Helmholtz: l'intensità del vortice risulta costante lungo il filamento vorticoso.

Infatti, una volta definita l'intensità in base al teorema di Stokes come $\Omega S = 2\omega S$, dove S è la sezione trasversale del filamento, per il teorema sulla divergenza del rotore:

$$\text{div}(\text{rot } \vec{u}) = 2 \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} = 0,$$

ossia il campo del vettore velocità angolare risulta solenoidale e di conseguenza abbiamo: $2\omega S = \text{costante}$ per tutta l'estensione del filamento stesso. Per il teorema di Stokes abbiamo inoltre $\Gamma = 2\omega S$, pertanto anche la circuitazione risulta costante lungo tutta la linea vorticoso.

Corollario: un filamento vorticoso non può terminare all'interno del fluido, ma deve estendersi da un contorno all'altro o chiudersi in se stesso.

Infatti se l'intensità, insieme alla circuitazione, deve essere costante non si può mai annullare altrimenti l'intero vortice cesserebbe di esistere.

Questo per il fluido ideale, ma lo spazio-fluido, con una viscosità locale⁵ $\nu = h/m$, la circuitazione è quantizzata proprio con il minimo valore $\Gamma = h/m$, di conseguenza il filamento vorticoso può terminare in un punto dove sia presente una particella di massa m perché in quel punto Γ certamente non si annulla.

II teorema di Helmholtz: Il fluido contenuto all'interno di un filamento vorticoso rimane sempre lo stesso.

Infatti attraverso la superficie laterale, per il campo solenoidale, non vi può essere mai un passaggio di vorticità e di fluido.

III teorema di Helmholtz: L'intensità di un filamento vorticoso rimane costante nel tempo.

Per il teorema di Stokes l'intensità, come abbiamo visto, risulta uguale alla circuitazione che, a sua volta deve rimanere costante nel tempo per il teorema di Thomson.

Velocità indotte da un filamento vorticoso, leggi di Biot e Savart.

Dato un filamento rettilineo di lunghezza indefinita, nei piani normali ad esso la circuitazione sarà:

$$\Gamma = 2\pi r u$$

e, per il teorema di Stokes, essendo uguale all'intensità $2\omega S$, rimane costante per tutte le circonferenze di raggio r , pertanto la velocità:

$$u = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (25)$$

viene definita *indotta* in analogia con le relazioni di Biot e Savart sulle spire del campo magnetico indotte da una corrente rettilinea.

Però dalla precedente vediamo che $u \rightarrow \infty$ per $r \rightarrow 0$, quindi sorge la necessità di un nucleo di raggio a , che costituisce l'essenza stessa del filamento vorticoso, con un movimento rigido, cioè in sostanza:

⁵Per i fotoni abbiamo $\frac{h}{m} = \frac{hc^2}{mc^2} = \lambda c = \frac{h}{p} c$, essendo $mc^2 = hf$.

$$u = \omega r \quad r \leq a$$

$$u = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad r > a$$

che assume il nome di vortice composto di Rankine.

Ora un filamento rettilineo, proprio per la sua conformazione geometrica, induce delle velocità solamente nel fluido circostante, al contrario in un filetto ricurvo alcune parti inducono su altre parti come ha dimostrato ampiamente Sante Da Rios nei suoi studi all'inizio del secolo scorso, partendo dalle equazioni (20) ed evidenziando proprio l'importanza della curvatura del filamento stesso⁶.

Occorre sottolineare come tutti questi teoremi siano di natura cinematica e non dinamica, cioè descrivono, o meglio consentono di descrivere ed analizzare il moto dei vortici nello spazio e nel tempo senza considerare le cause che lo provocano. Il più importante per i nostri scopi risulta senz'altro il teorema di Thomson. Questo afferma, come abbiamo visto, la costanza della circuitazione nel tempo, quindi se ad un certo istante t_o esiste una circuitazione $\Gamma(t_o)$, al successivo istante generico t avremo: $\Gamma(t) = \Gamma(t_o)$ come conseguenza abbiamo che: *in un fluido perfetto non è possibile generare dei nuovi vortici*. Infatti se $\Gamma = 0$ ad un certo tempo lo sarà anche per il futuro. Questo vale per i singoli vortici isolati, invece, sia nel fluido ideale che in quelli reali come l'acqua e l'aria, constatiamo che si possono generare delle coppie *speculari*, cioè con lo stesso valore ma di senso opposto: $\Gamma_+ = \Gamma_-$, in modo tale da avere una circuitazione totale nulla, proprio come richiede il teorema di Thomson ed il terzo teorema di Helmholtz. Infatti gli aeronautici osservano sempre alla partenza un vortice che si distacca dalla coda dell'ala con un'eguale circolazione ma di senso

⁶Luigi Sante Da Rios: Sul moto d'un liquido indefinito con un filetto vorticoso di forma qualunque, Padova 1906.

opposto a quello che, per il teorema di Joukovski, ne provoca la portanza.

Pertanto per generalizzare occorre stabilire che in un piano di giacitura x_i, x_j , quindi normale all'asse x_k occorre sempre avere un vortice di intensità $\Gamma = 2\omega_k S$, insieme alla sua immagine speculare rispetto al piano mediano M con uguale intensità ma di senso opposto (Fig. 8).

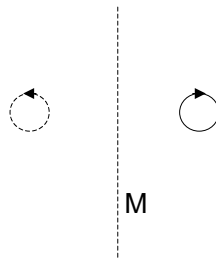


Figura 8: Per rispettare il teorema di Thomson si devono generare, in ogni piano dello spazio-fluido, delle coppie di vortici, uno immagine speculare dell'altro, rispetto al piano M e quindi con $\Gamma = \Gamma_+ + \Gamma_- = 0$.

Naturalmente, detta r la distanza di ciascun vortice da M, in base alla (25) ognuno indurrà sull'altro una velocità:

$$u = \frac{\Gamma}{4\pi r},$$

quindi la coppia sarà costretta, per mutua induzione idrodinamica, a traslare di conserva, nel caso in figura verso l'alto, percorrendo nel tempo uno spazio $y = ut$.

Nelle tre dimensioni i due vortici saranno uniti da un filamento vorticoso che ruota congruentemente come accade per le coppie di macchie solari (Fig. 9).

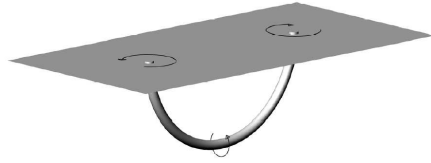


Figura 9: I due vortici precedenti uniti nello spazio da un filamento con una circuitazione congruente, come accade nelle macchie solari.

Una linea vorticale rettilinea può collegare due particelle con massa m situate agli estremi e quindi con viscosità cinematica $\nu = h/m$, oppure, se si tratta di bosoni, $\nu = \lambda c$. Anche in questo caso le circuitazioni sono simmetriche rispetto al piano mediano risultando decisamente speculari se osservate dalle rispettive estremità, quindi sulle due facce opposte del piano il teorema di Thomson risulta soddisfatto.

Se inoltre la linea vorticoso subisce una deviazione ad angolo retto, occorre che ciò avvenga per entrambe le estremità ed in modo simmetrico, proprio per avere, sul piano che le contiene, due circolazioni uguali e contrarie (Fig. 10).

In conclusione possiamo affermare in generale che per il teorema di Thomson ed il terzo di Helmholtz è sempre necessario che:

Per una coppia di vortici in un piano di qualsiasi giacitura l'uno deve essere sempre un'immagine speculare dell'altro ed i filetti vorticosi si devono conformare, sempre in modo speculare, per consentire che questo avvenga.

Con queste premesse risulta adesso più facile rispondere all'ultima domanda.

§ 8. - La non località quantistica.

Siamo giunti infine all'ultima domanda:

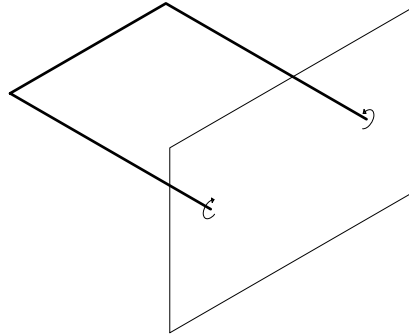


Figura 10: Sempre per il rispetto del teorema di Thomson se una estremità di una linea vorticoso viene deviata anche l'altra la deve seguire in modo da ottenere un'immagine speculare rispetto al piano mediano e quindi in definitiva avere su tutti i piani normali: $\Gamma = \Gamma_- + \Gamma_+ = 0$.

La non località quantistica può essere spiegata correttamente e con semplicità?

Per comodità del lettore esponiamo brevemente il concetto di non località: una coppia di fotoni emessi da una sorgente particolare si trovano in uno stato definito *entanglement* (*groviglio*) ossia uno ha uno spin $+1$ e l'altro -1 , ma il loro legame non finisce qui. Infatti per Einstein, Podolsky e Rosen una volta separati dovrebbero non interagire a distanza oppure, secondo la teoria della relatività, una certa informazione scambiata tra di loro dovrebbe viaggiare alla velocità della luce, ossia dovrebbero seguire una *teoria realistica locale* dovuta a J.S.Bell secondo cui un certo parametro legato alle polarizzazioni delle due particelle sarebbe compreso tra -2 e $+2$, appunto la disuguaglianza di Bell.

Se per esempio, in un esperimento ideale, si potesse cambiare la polarità da $+1$ a -1 del primo che com'è noto è legata allo spin, il secondo istantaneamente da -1 diverrebbe $+1$ anche se a

distanza notevole, quindi in aperta violazione della teoria realistica locale e della disuguaglianza di Bell. Infatti le esperienze in laboratorio di Alain Aspect mostrano che i due fotoni sono sempre legati. Egli ha verificato realmente le coincidenze esistenti tra le polarità: $(+1, -1)$ e viceversa⁷. Ma le stranezze riguardano anche il percorso effettuato dalle due particelle, infatti se un fotone viene deviato mediante un apparato ottico, l'altro devia in modo speculare senza che ciò sia provocato da un apparato fisico (Fig. 11).

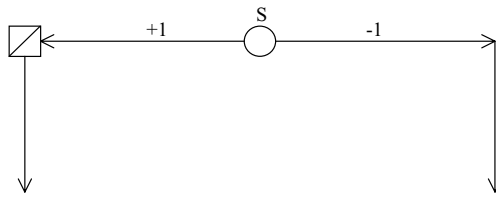


Figura 11: Una coppia di fotoni *entangled* viene prodotta dalla sorgente S con atomi di Ca. Se un fotone viene deviato mediante un apparato ottico, l'altro devia specularmente, rispetto ad S, senza nessun apparato fisico.

Per dare una risposta a tutto questo che sia, al tempo stesso, semplice e coerente con l'idea dello spazio-fluido occorre ripensare al vortice di Rankine cioè ad un filamento vorticoso che abbia un nucleo ruotante come un corpo rigido con un diametro dell'ordine dell'Å. Quando abbiamo una coppia di fotoni entangled, questi sono situati alle due estremità di un **filamento in moto vorti-**

⁷Alain Aspect, P. Granger, G. Roger Experimental Realization of E.P.R. Bohm *Gedankenexperiment*: A new Violation of Bell's Inequalities - Physical Review Letters, July 1982, pp. 91-94.

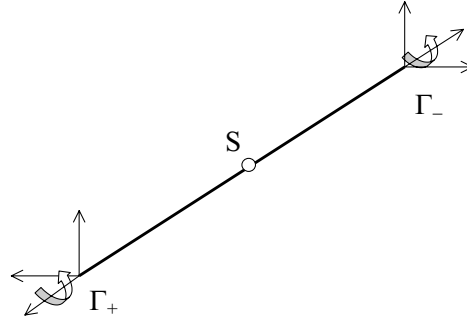


Figura 12: a) La coppia di fotoni *entangled* emessi dalla sorgente S, essi risultano legati da un filamento di spazio in moto vorticoso, un nucleo di Rankine che ruota come un corpo rigido con circuitazione vista dagli estremi: $\Gamma_+ = +hc/p$; $\Gamma_- = -hc/p$.

coso che li unisce e costituisce un legame tra di essi. Ad un estremo i vettori campo elettrico \vec{E} , magnetico \vec{H} ed impulso nella direzione di propagazione \vec{p} formano una terna destrorsa, pertanto abbiamo lo spin pari a +1 e la circuitazione positiva: $\Gamma_+ = +hc/p$, mentre dall'altra parte la terna risulta in senso contrario, di conseguenza i vettori \vec{E} ed \vec{H} hanno una polarizzazione ortogonale rispetto alla precedente e la circuitazione e lo spin sono entrambi negativi: $s=-1$, $\Gamma_- = -hc/p$ (Fig. 12).

Ora in un **filamento rigido** di qualsiasi forma un'azione si trasmette da un capo all'altro **in modo istantaneo** anche a **grandissima distanza**, inoltre essendo un vortice deve soddisfare i teoremi cinematici visti al § precedente, in particolare il teorema di Thomson, cioè deve avere un comportamento speculare una volta che viene deviato per presentare, in ultima analisi, una circuitazione nulla sui piani ortogonali alla direzione del moto

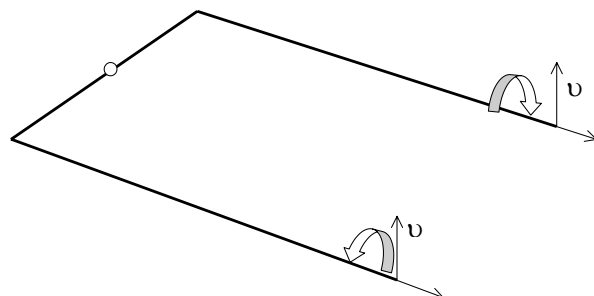


Figura 13: Se uno dei fotoni viene deviato l'intero filamento deve avere un comportamento speculare per presentare una vorticità complessiva nulla: $\Gamma = +hc/p - hc/p = 0$, come richiedono i teoremi di Thomson e di Helmholtz.

(Fig. 10-13).

Quindi, nell'ipotesi dello spazio-fluido, la non località, che risulta molto oscura ai fisici dividendoli con il paradosso E.P.R. e la disuguaglianza di Bell, diviene così chiara e così semplice da suscitare un vero stupore, ma tutto ciò non è altro che la conseguenza dei teoremi sui vortici in Idrodinamica. La semplicità della teoria dello spazio-fluido risulta sorprendente se paragonata ad altre spiegazioni della non località come la presenza di un non precisato *iperspazio* che legherebbe i fotoni entangled oppure la fumosa teoria delle stringhe.

§ 9. - La falsificazione.

La presente teoria dello spazio-fluido deve essere falsificata, ossia deve essere sottoposta ad una possibile verifica sperimentare per accoglierla o respingerla definitivamente.

Una prima possibilità la riscontriamo nell'effetto delle velocità autoindotte dai fotoni entangled.

I) *Le velocità indotte.*

Come si può notare dalla figura (Fig. 13) la coppia di fotoni entangled procede di conserva con traiettorie parallele ad una distanza r . Come abbiamo visto nel precedente § tra i due filamenti vorticosi paralleli si genera una velocità mutuamente indotta v secondo la relazione di Biot e Savart in Idrodinamica. La formula (25) vale per un filamento di lunghezza indefinita, per un semispazio vale la metà ($v = \Gamma/4\pi r$), in generale per un vortice che, come nel nostro caso, inizia nell'origine (a partire dalla deviazione dei raggi) per una lunghezza generica x la (25) si trasforma nella seguente:

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi r} \cos\beta \quad (26)$$

dove β è l'angolo all'estremità di ciascun filamento con cui si sottende la distanza r , pertanto possiamo scrivere:

$$\cos\beta = \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

quindi la (26) si trasforma nella:

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi r} \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}}.$$

Ora dato che $\Gamma = hc/p = \lambda c$ la precedente velocità indotta che agisce in direzione normale alle traiettorie dovrebbe generare su queste una deflessione, una curvatura con uno spostamento trasversale $y = vt$, ma nello stesso tempo t i due fotoni avranno intanto percorso in direzione del moto lo spazio $x = ct$, quindi in definitiva otteniamo:

$$y = \frac{\lambda}{4\pi r} \frac{x^2}{\sqrt{r^2 + x^2}},$$

che, ponendo $\xi = x/r$ può essere scritta in forma adimensionale:

$$\frac{y}{\lambda} = \frac{1}{4\pi} \frac{\xi^2}{\sqrt{1+\xi^2}}. \quad (27)$$

Pertanto la traiettoria di ciascun fotone della coppia si dovrebbe incurvare secondo la (27), naturalmente verso l'alto od il basso in modo congruente con Γ . Nelle esperienze di Aspect questa deviazione sarebbe risultata senz'altro trascurabile perché $\xi \simeq 1$, per avere dei risultati accettabili infatti occorre un valore: $\xi \simeq 10^4$, quindi con r dell'ordine dei centimetri od addirittura dei millimetri e x delle centinaia o delle decine di metri. La (27) risulta non lineare solo se $\xi \simeq 1$, invece per alti valori si può trascurare 1 sotto la radice e quindi otteniamo una relazione lineare:

$$\frac{y}{\lambda} = \frac{1}{4\pi} \xi. \quad (28)$$

Il condizionale usato in precedenza deriva dal fatto che le relazioni (27) e (28) valgono in Idrodinamica per un moto irrotazionale ossia potenziale senza fluttuazioni di velocità, qui però entra in gioco la turbolenza dello spazio-fluido, pertanto il numero di Reynolds composto con le dimensioni delle celle Δy e Δv deve esprimere la condizione di moto turbolento:

$$\frac{\Delta y \Delta v}{\nu} \geq \frac{1}{4\pi},$$

dove la viscosità cinematica locale dello spazio risulta: $\nu = \lambda c = hc/p_y$. La precedente può essere anche scritta nella forma seguente che rappresenta il principio di indeterminazione:

$$\Delta y \Delta v \geq \frac{\hbar}{2} \frac{c}{p_y},$$

oppure:

$$\Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2},$$

inoltre ricordiamo che:

$$v = \frac{\lambda c}{4\pi r},$$

quindi, se la v fosse determinata a causa dell'energia del fotone e quindi con una lunghezza d'onda ben nota, la $\Delta v \rightarrow 0$ e $\Delta p_y \rightarrow 0$, di conseguenza la posizione del fotone in direzione y sarebbe completamente incerta: $\Delta y \rightarrow \infty$. Se invece esistesse una indeterminazione sulla velocità, per esempio $\Delta v \simeq v$, allora, dalle relazioni precedenti avremmo immediatamente ⁸:

$$\Delta y \geq r,$$

ossia la posizione di ogni particella con un'indeterminazione dello stesso ordine, o superiore, alla distanza tra le due traiettorie. La deflessione y , risulterebbe quindi coperta dall'incertezza Δy , pertanto se a qualcuno venisse in mente di condurre un esperimento come descritto sopra (Fig. 13) non potrebbe constatare la deflessione del percorso di ciascun fotone a causa della turbolenza presente nello spazio che produrrebbe, anche in questo caso, delle traiettorie indeterminate ed indeterminabili.

II) *Le cariche oscillanti.*

Si potrebbe erroneamente pensare di sfruttare l'oscillazione di particelle cariche come gli elettroni per rilevare la turbolenza dello spazio mediante l'energia elettromagnetica da loro emessa.

Supponiamo di avere dei fotoni che vanno ad attraversare una zona dove sono presenti degli elettroni fermi, secondo la presente teoria i fotoni producono una scia turbolenta nello spazio e gli elettroni sono costretti a seguire lo spazio curvo ed ad oscillare. Se un fotone urta un elettrone abbiamo, com'è noto, l'effetto Compton, se invece passa in vicinanza dovrebbe far oscillare le cariche. Però, come accade negli stati stazionari dell'atomo di idrogeno, l'elettrone, catturato da un nucleo vorticoso della scia, un vortice

⁸Infatti $\Delta y \lambda c / 4\pi r \geq \lambda c / 4\pi$.

di Rankine, si trova in condizioni idrostatiche, lo spazio intorno ad esso risulta relativamente fermo a causa del movimento rigido del nucleo stesso. Pertanto risulta anche **in condizioni elettrostatiche** e quindi non emette nessuna energia elettromagnetica salvaguardando così il principio di conservazione dell'energia⁹. Questo fatto ha una valenza generale, per tutti i moti turbolenti fin qui esaminati, come i fenomeni di diffrazione ed interferenza di particelle elettricamente cariche.

In ultima analisi dobbiamo constatare che, anche in questa seconda maniera, non risulta possibile falsificare la presente teoria, rimaniamo però saldi nella fiducia che in futuro si riuscirà senz'altro nell'intento. In attesa è però possibile condurre un'esperienza reale per saggiare l'interpretazione di Copenaghen.

§ 10. - Un esperimento cruciale.

L'obiezione di Renninger, che abbiamo ampiamente discusso nel primo capitolo, può essere eseguita realmente. Consideriamo infatti i fotoni provenienti da una sorgente molto lontana come una stella, a causa di questo essi si devono presentare con un fronte d'onda piano. Usiamo due fotomoltiplicatori identici montati su altrettanti obiettivi con uguali caratteristiche a bassa luminosità ($f/10$) puntati sulla stella. L'apparato A viene installato dalla parte della stella in modo da rilevare per primo i fotoni, mentre l'altro uno o due metri più distante, leggermente decentrato in modo da non essere all'ombra di A (Fig. 14).

Supponiamo che entrambi gli apparati abbiano un rendimento ordinario del 20%, cioè rilevano in media un fotone su 5, ma per noi questo non costituisce un problema, l'importante è che entrambi abbiano la stessa capacità di conteggio. Osserviamo i contatori dei fotoni per un intervallo di tempo abbastanza lungo ed a questo punto si aprono due scenari contrastanti:

⁹Infatti i fotoni diffusi per effetto Compton hanno un'energia inferiore, mentre gli altri, non diffusi, conservano la loro λ iniziale. Quindi se, in questo caso, vi fosse un'emissione da parte degli elettroni, il principio sarebbe violato.

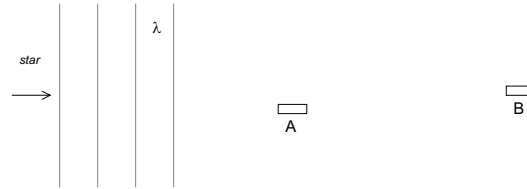


Figura 14: I fotoni, disposti su fronti d'onda piani e provenienti da una stella luminosa come α Lyrae (Vega), vengono contati tramite due fotomoltiplicatori: A disposto dalla parte della stella e B poco lontano da A e leggermente decentrato.

- 1) Il contatore di A rileva un certo numero di particelle n_A , mentre, nello stesso intervallo di tempo osserviamo sempre $n_B = 0$.
- 2) Entrambi i contatori rilevano un certo numero di particelle in modo alternato, ossia a volte scatta solamente A ed a volte solo B (con risultato negativo in A), però in un intervallo di tempo abbastanza lungo il primo contatore registrerà cumulativamente n_A particelle, l'altro n_B , possiamo senz'altro sempre osservare:

$$n_A = n_B$$

L'esperienza risulta cruciale perché, se si verifica il primo scenario significa la piena validità dell'interpretazione di Copenaghen. Infatti il primo strumento A, più vicino alla sorgente, provoca sempre il collasso dell'onda piana che evidentemente non può mai raggiungere B.

Ma se al contrario si presenta il secondo scenario allora significa che il collasso dell'onda non esiste, altrimenti questa dovrebbe essere in grado di calcolare la probabilità di collasso e decidere quando farlo su A e quando su B o su altri strumenti presenti, il che è assurdo. Se invece i fotoni si comportano come particelle

allora, essendo gli obiettivi identici, avranno la stessa probabilità di entrare in A oppure in B e quindi il risultato dell'esperienza, ossia $n_A = n_B$, risulta semplice ed evidente.

Il secondo risultato dell'esperimento cruciale quindi decide per l'infondatezza dell'interpretazione di Copenaghen e non esclude l'interpretazione di Paris basata sull'onda guida, ma soprattutto non risulta in contrasto con quella di Pisa che si fonda sulla turbolenza dello spazio in grado di far fluttuare le particelle in modo casuale.

§ 11. - Riepilogo.

Nel primo capitolo abbiamo visto come i fenomeni vorticosi in acqua abbiano un comportamento quantizzato con una costante pari a $k = 406\nu$ dove ν è la viscosità cinematica. Per l'acqua scongelata ($t = 1^\circ C$) abbiamo $k = 7 \cdot 10^{-4} [m^2/s]$, ossia molto vicino al valore del rapporto $h/m = 7.27 \cdot 10^{-4} [m^2/s]$ per l'elettrone e, a temperatura ambiente, i due valori rimangono sempre dello stesso ordine di grandezza.

Tutto questo suscita una vera curiosità per la presente interpretazione perché Strabone notoriamente afferma che $\Pi\varepsilon\tilde{\iota}\sigma\alpha$ fù fondata dai Pisati in fuga dal Peloponneso, inoltre, secondo alcuni il nome di questa città, anticamente vicina ad Olimpia, risulta legato all'acqua.

Infatti, in analogia con l'acqua, considerando lo spazio fisico, un condensato di Bose e quindi un continuum che si comporta come un fluido in moto turbolento, tutte le contraddizioni, le discrepanze, i dubbi che si presentano nel mondo dei quanti si dissolvono e tutto si manifesta in un modo così chiaro e così semplice da suscitare stupore.

Con questa ipotesi siamo riusciti a dare una risposta semplice e sensata alle cinque domande fondamentali:

1) Per la condizione di esistenza di un singolo vortice la circuitazione deve avere un valore minimo: $\Gamma = h/m$ e per n vortici $\Gamma = h/m \cdot n$, quindi la circuitazione risulta quantizzata.

2) Come conseguenza abbiamo che la scala principale della turbolenza segue la relazione di De Broglie ed inoltre il momento angolare risulta anch'esso quantizzato. I vortici idrodinamici si comportano alla Rankine, ossia con un nucleo in moto come un corpo rigido, all'interno le particelle si trovano in condizioni idrostatiche, quindi oltre a non avere gli effetti della viscosità, le particelle sono ferme rispetto allo spazio circostante e quindi anche in condizioni elettrostatiche, pertanto non possono in alcun modo emettere energia elettromagnetica. Quindi si spiegano così gli stati stazionari di Bohr in maniera chiara e semplice, ma soprattutto senza introdurre delle eccezioni alle leggi dell'elettromagnetismo.

3) Le relazioni di indeterminazione di Heisenberg non sono altro che un modo diverso di scrivere il numero di Reynolds composto con le dimensioni delle celle nello spazio delle fasi. Per ottenere il moto turbolento queste celle infatti devono avere una superficie limitata inferiormente con le fluttuazioni di velocità inversamente proporzionali alle dimensioni: $\Delta x_i \Delta u_i \geq \hbar/2m$. L'indeterminazione quindi non è altro che la conseguenza dell'agitazione turbolenta dello spazio.

4) I vortici di Rankine sono in grado di catturare una particella all'interno del loro nucleo, come avviene in un aerosol, pertanto la distribuzione di queste non sarà altro che la conseguenza della concentrazione dei vortici stessi. Nelle zone infatti dove troveremo un maggior numero di strutture vorticosi vi sarà anche una maggiore velocità del fluido e di conseguenza una concentrazione di particelle più elevata. Anche l'energia cinetica del fluido risulterà proporzionale al quadrato della velocità, quindi il quadrato della funzione d'onda indica allo stesso tempo l'energia turbolenta presente nel fluido e la distribuzione della densità di probabilità delle stesse particelle.

Non c'è più bisogno del collasso dell'onda e di eccezioni ai principi del calcolo delle probabilità perché la turbolenza spaziale guida le particelle, indipendentemente l'una dall'altra, secondo traiettorie indeterminate ed indeterminabili. Tutte le figure di diffrazione ed interferenza non sono altro che la conseguenza di

questo, cioè con le particelle quantistiche che mantengono sempre le loro caratteristiche estremamente concentrate nello spazio, ma la scia turbolenta, da esse stesse generata, le guida nelle zone dove l'energia del fluido risulta maggiore secondo l'equazione di Schrödinger e le leggi dell'ottica ondulatoria, equazione che, come abbiamo visto, può essere derivata dalle equazioni di Euler.

5) Infine la non località quantistica che più di tutto ha reso perplessi i fisici risulta spiegabile in modo semplice e chiaro ricorrendo ai filamenti vorticosi alla Rankine, cioè con un nucleo lungo e sottile che ruota come un corpo rigido. Questi oggetti infatti devono seguire i teoremi di Thomson e di Helmholtz dell'Idrodinamica. Secondo questi la vorticità si deve conservare nello spazio e soprattutto nel tempo. Pertanto non si potrebbero generare nuovi vortici singoli, ma si possono avere delle coppie speculari, cioè controrotanti in modo da avere una vorticità complessiva nulla, questo comportamento speculare riguarda conseguentemente tutte i piani in ogni direzione e pertanto l'intero filamento.

Quindi una coppia di particelle *entangled* si trovano ai lati estremi di una linea vorticosa e sono legate da un filamento di Rankine che, muovendosi come un corpo rigido, trasmette istantaneamente anche a grande distanza l'azione o la misura che viene eseguita su una particella ad una estremità. Inoltre se agiamo sul percorso stesso, sul filamento, questo per ottemperare al teorema di Thomson, deve reagire in modo speculare spiegando così i fatti sperimentali osservati.

In ultima analisi il rompicapo visto all'inizio viene interamente risolto se partiamo da un'altro presupposto: lo spazio, lo spazio fisico che non è per niente nascosto, ma risulta il protagonista e non solo lo spettatore degli eventi. Tutto allora si palesa alla nostra mente, tutto diviene così chiaro e così semplice e tutte le diverse contraddizioni dei quanti si dissolvono come nebbia al sole.

Ma, dato che si tratta dell'interpretazione di Pisa, lasciamo le conclusioni a Galileo. Infatti esiste un'analogia tra la scelta di allora tra il complicato sistema di Tolomeo, sostenuto da tutti, ed il semplice di Copernico con pochissimi seguaci, ora come allora non

esiste un'esperienza definitiva per scegliere l'uno o l'altro. Galileo, controcorrente scelse il sistema copernicano perché era il più semplice, adesso possiamo adottare lo stesso criterio perché gli assurdi epicicli di Tolomeo sono analoghi al collasso dell'onda di Bohr. Partendo invece da un altro presupposto, ossia lo spazio fluido, tutto acquista un senso, tutto si chiarisce nella nostra mente.

Difficilmente però questa teoria verrà accettata dai più, ma lasciamo parlare lo stesso pisano che con grande saggezza ed equilibrio afferma:

*La filosofia medesima non può se non ricever beneficio dalle nostre dispute, perché se i nostri pensieri saranno veri, nuovi acquisti si saranno fatti, se falsi, col ributtargli, maggiormente verranno confermate le prime dottrine.*¹⁰

Lasciamo quindi che le future *sensate esperienze* decidano in ultima analisi su tutta la questione, però visti i notevoli risultati, che gettano luce tra le nebbie del Nord, possiamo senz'altro affermare con Galileo, questa volta con riferimento non alla terra, ma allo spazio: *eppur si move!*

¹⁰G. Galilei. Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, giornata I, Ed. Einaudi p. 47-48.

Ringraziamenti.

Tutte queste idee sono maturate in anni di minuziose osservazioni e di attente riflessioni presso il Laboratorio di Idraulica dell'Università di Pisa. Queste esperienze non sarebbero state possibili senza la competente e pronta collaborazione del personale. Pertanto oltre ai vari direttori e docenti che mi hanno accolto e permesso di lavorare in un clima di vera libertà intellettuale: il Prof. Valerio Milano e, con un ricordo purtroppo postumo, il Prof. Franco Sassoli, si ringraziano sentitamente i tecnici del Laboratorio, i ragazzi di via Gabba: Nicola Bruni, Antonio Cecchi, Marco Del Corso, Alessandro Michelotti e Vincenzo Pennabea.

Con vera gratitudine occorre infine un postumo pensiero al validissimo collaboratore Geom. Giancarlo Pratali.

I N D I C E

Capitolo I: Le basi sperimentali.	pag. 5
§ 1. - Premesse.	5
§ 2. - Le esperienze sul distacco dei vortici.	7
§ 3. - Il distacco dei vortici in condizioni subcritiche.	12
§ 4. - La limitazione delle celle nello spazio delle fasi.	17
§ 5. - Le esperienze sui getti di fluido.	20
§ 6. - Un'esperienza ideale nell'elio liquido.	23
§ 7. - Un'esperienza ideale nello spazio	27
§ 8. - Le domande fondamentali.	33
Capitolo II: La teoria generale dello spazio fluido.	35
§ 1. - Premesse.	35
§ 2. - Le equazioni fondamentali.	36
§ 3. - La funzione d'onda.	39
§ 4. - L'equazione d'onda.	41
§ 5. - L'operatore hamiltoniano ed il caso limite.	45
Capitolo III: Lo spazio fluido.	49
§ 1. - Solo lo spazio.	49
§ 2. - La quantizzazione del momento angolare.	52
§ 3. - Gli stati stazionari.	53
§ 4. - Il principio di indeterminazione.	55
§ 5. - Il significato della funzione d'onda.	58
§ 6. - L'oscillatore armonico lineare.	64
§ 7. - L'Idrodinamica per mezzo di immagini speculari.	69
§ 8. - La non località quantistica.	75
§ 9. - La falsificazione.	79
§ 10. - Un esperimento cruciale.	83
§ 11. - Riepilogo.	85
Ringraziamenti	89
Indice	91